
CO: RICCATI





Pitti

Genn Joseph

ENTRETIENS MATHÉMATIQUES SUR LES NOMBRES, L'ALGÈBRE,

LA GÉOMÉTRIE, LA TRIGONOMÉTRIE rectiligne, l'Optique, la Propagation de la Lumière, les Télescopes, les Microscopes, les Miroirs, l'Ombre & la Perspective;

Par le R. P. REGNAULT *de la Compagnie de* JESUS.

TOME PREMIER.

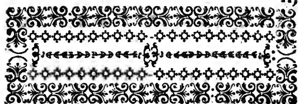


A PARIS,

Chez { CLOUSIER, DAVID, Fils, DURAND, } *Ruë S. Jacques.* DAMONNEVILLE, *Quay des Augustins.*

M. DCC. XLIII.

Avec Approbation & Privilege du Roy.



PRÉFACE.

DANS ces Entretiens nouveaux, on donne assez peu à l'Art du Dialogue, afin d'être plus précis dans des matiéres qui demandent de la précision : cependant, on l'essaye, cet Art, tant pour suivre son goût, que pour piquer & soutenir l'attention par la varieté, du moins dans la maniére de dire les choses.

Peut-être, verra-t-on avec quelque surprise & quelque plaisir, deux personnes s'entretenir assez souvent, assez long-temps même, & ne dire guéres que des

vérités. Ariste & Eudoxe, ont dit, dans leurs Entretiens Physiques (1), des choses plus sensibles & plus riantes; ils en diront dans leurs Entretiens Mathématiques, de plus certaines, & peut-être plus capables de toucher l'esprit attentif. Celles-ci même, quoique plus sombres, ou moins riantes, pourront servir à répandre plus de jour encore & d'agrément dans celles-là.

L'esprit aime à se voir conduit par un chemin qui s'applanit toujours; il veut que l'on le fasse passer des choses les plus simples, à celles qui le sont moins, ou des choses qu'il connoît, à celles qu'il ne connoît

(1) *Entretiens d'Ariste & d'Eudoxe, ou Physique nouvelle en Dialogues.*

pas, enforte que la lumière des unes ferve à dévoiler les autres ; il va volontiers par dégrés, pas à pas, mais fans interruption, de vérités connues en vérités toujours nouvelles pour lui, & s'il fe peut toujours plus frapantes. Voilà le charme qui attache l'efprit, qui le fixe fur les objets, & lui fait trouver par tout un accès prefqu'égal ; & c'eft-là juftement une des prérogatives du Calcul, de la Géométrie & de la Trigonométrie.

Ces Sciences font une chaîne de vérités toujours plus intéreffantes, toujours plus accompagnées & plus difficiles à démêler, mais qui fe tenant comme par la main, menent d'elles-mêmes, avec la même facilité, les unes aux autres. A la lu-

mière du Calcul; la Géométrie qui mesure l'étendue, guide nos pas, & nous faisant traverser toujours avec la même facilité, des routes toujours plus difficiles, elle nous empêche d'errer dans une étendue sans bornes accessibles à nos sens. La Trigonométrie, qui à la faveur du Calcul & de la Géométrie, détermine les distances, nous apprend celle des Planétes, à peu près comme celle des Contrées, qui ne sont qu'à deux pas. Pour enrichir les Sciences, la Trigonométrie reculera en quelque sorte les bornes de l'Univers. Au jugement des sens, les bornes de l'Univers seront, ce semble, assez étroites : mais par le secret de quelques Triangles connus, la Trigonométrie vous

éleve de la Terre à la Lune; de la Lune au Soleil; du Soleil, aux Planétes les plus reculées; & là, surpris de vous voir à des millions de lieuës de la Terre, & pour ainsi dire, de vous même, vous êtes encore plus étonné d'avoir fait à peine une partie du chemin qu'il faut parcourir pour atteindre à la Région des Etoiles, de ces feux répandus dans les Cieux pour suppléer la nuit à la lumière du jour.

A la lumière du Calcul, de la Géométrie & de la Trigonométrie, l'Optique, pour nous délasser & nous égayer un peu, nous découvrira le jeu des rayons directs, des rayons rompus ou brisés par le Verre, des rayons réfléchis par ces Glaces où l'Art sert à nous peindre si bien la Na-

ture. Tantôt nous verrons comment le Téleſcope offre à nos regards dans les Cieux des milliers d'Aſtres nouveaux ; tantôt de quelle maniére le Microſcope nous découvre à nos pieds un petit monde qui fourmille d'Inſectes ; ou par quel art la Nature même cauſe dans nos ſens les douces illuſions de la Perſpective. On démêle volontiers les reſſorts, qui, ſans nous nuire, nous trompent agréablement.

Enfin, dans ces Entretiens, on s'eſt fait un plaiſir de profiter des lumières de perſonnes éclairées à la fois & de lumières étrangeres & de leurs propres lumières.

TABLE
DES
ENTRETIENS
MATHÉMATIQUES

Contenus dans le premier Tome.

SUR LES NOMBRES.

SUR LE CALCUL LITTERAL.

Fin de la Table.



PERMISSION.

du R. Pere Provincial.

JE soussigné Provincial de la Compagnie de Jesus en la Province de France, suivant le pouvoir que j'ai reçû de notre R. Pere Général; permets au Pere NOEL REGNAULT, de la même Compagnie, de faire imprimer un Livre intitulé, *Entretiens Mathématiques*, qu'il a composé, & qui a été vû & approuvé par trois Théologiens de notre Compagnie, en foi de quoi j'ai signé la présente. A Nevers ce 6 Juin 1742.

JEAN LAVAUD,
de la Compagnie de Jesus.

ERRATA

Du Premier Tome.

Page 43. *ligne* 14. ou 4. *lifez*, ou 4. dixaines.

Page 99. *lig*. 18. prifes enfemble ; *lifez*, multipliées par le Divifeur.

Page 102. *lig*. 16. 364. *lifez*, 354.

Page 128. *lig*. 10. $\overline{a+a+a} \times b + b$, *lifez*, $\overline{a+a+a} \times \overline{b+b}$.

Page 145. *lig*. 4. par induction, *lifez*, par indiction.

Page 157. *lig*. 9. $c^2 \times b - c$, *lifez*, $\overline{c^2 \times b - c}$.

Page 232. *lig*. 6. 2. eft à en, *lifez*, 2 eft a 4.

Page 287. *lig*. 13. 1, $+\frac{4}{32}$, *lifez*, 11 $+\frac{4}{32}$.



ENTRETIENS MATHÉMATIQUES SUR LES NOMBRES.

I. ENTRETIEN.

Sur l'Addition.

Ariste. JE ſuis charmé, Eudoxe, de vous trouver dans votre Cabinet, je deſeſpérois preſque de vous voir. Tout ſembloit vous attirer au Luxembourg, au Palais Royal, ou aux Thuilleries.

Eudoxe. Tout m'invitoit à la promenade, il eſt vrai. Mais, Ariſte, quand on aime les Mathé-

matiques, on n'aime guéres d'autres plaisirs.

Ariste. Votre goût est le mien; & ce que vous éprouvez, je l'éprouve. Car si je ne suis pas bien profond dans la Science célébre de la grandeur, ou des nombres, de l'étenduë & du mouvement, je suis du moins assez initié dans le Calcul, dans la Géométrie, & dans la Trigonométrie, pour sçavoir les estimer & les aimer. Sans parler de l'usage du Calcul dans les affaires domestiques & dans le commerce de la vie, me trompe-je, Eudoxe, n'est-ce pas la Science la plus lumineuse? Les vérités propres des autres Sciences sont, ce semble, environnées, la plûpart, de quelque obscurité, de quelque nuage; celles du Calcul brillent d'une lumiere pure; lumiere qui a d'autant plus d'attraits pour moi, qu'elle ne laisse nulle inquiétude dans mon esprit,

& qu'elle l'accoutume sans que j'y pense, à chercher la même clarté dans les choses qui en sont susceptibles. En un mot, le Calcul, quoiqu'il ait l'air un peu sec, me touche par son caractere particulier d'évidence; & s'il étoit fait pour être le sujet d'une conversation, j'entrerois volontiers dans un détail suivi des opérations du calcul numerique ou par nombres, pour voir si mes idées là-dessus sont justes, si ma maniere d'opérer est bonne. Enfin, l'on s'entretient volontiers de ce qu'on aime.

Eudoxe. Dans le fonds, point de matiére si féconde en vérités également certaines & claires.

Ariste. C'est une chose surprenante que l'assortiment de quelques nombres ou de quelques chiffres simples, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (1) avec l'o, ou

(1) Un. deux. trois. quatre. cinq. six. sept. huit. neuf.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

le zero, donne une multitude prodigieuse de vérités inconteſtables.

1. EUDOXE. L'unité, la mettez-vous au rang des nombres?

ARISTE. L'unité me paroît être plûtôt la racine ou l'origine de tous les nombres, qu'un nombre. Le nombre, à proprement parler, eſt un aſſemblage d'unités; 2, 3, 4, 5, &c. ſont des nombres. Néanmoins, comme l'unité réïtérée fait les nombres, & ſe trouve ſans ceſſe mêlée avec les nombres, on la traite aſſez ordinairement elle-même de nombre.

2. *EUDOXE*. Mais le zero, que lui faites vous dire?

ARISTE. Rien, ſinon que déterminant le rang des chiffres ou des nombres qui le précédent, il fixe l'étenduë de leur ſignification: car les chiffres ſignifient plus ou moins, ſelon le rang où ils ſe trouvent quand ils ſont rangés de ſuite. Dans une ſuite de nombres,

comme 2345678974, le premier, en allant de la droite à la gauche, ſignifie des unités ; le ſecond, des dixaines d'unités ; le troiſiéme, des centaines ; le quatriéme, des mille ; le cinquiéme, des dixaines de mille ; le ſixiéme, des centaines de mille ; le ſeptiéme, des millions ; le huitiéme, des dixaines de millions ; le neuviéme, des centaines de millions ; le dixiéme, des milliards, &c. De ſorte qu'un chiffre qui recule d'un rang, augmente d'autant de dixaines qu'il contient d'unités. 1 au premier rang ſignifie une unité ; au ſecond, une dixaine d'unités ; au troiſiéme, dix dixaines, ou une centaine d'unités, &c. 2 au premier rang, ſignifie deux unités ; au ſecond, deux dixaines, &c. Un zero faiſant reculer 1 d'un pas, l'éleve à la valeur d'une dixaine ; deux zero l'éleveroient à la valeur d'une centaine ; trois, d'un mille ; quatre,

d'une dixaine de mille; cinq, d'une centaine de mille; six, d'un million, &c.

Ainsi, ces quatre chiffres 4321 valent quatre mille, trois cens, vingt & un, parce que 1, qui est au premier rang, au rang des unités, vaut un, que 2 étant au second rang, au rang des dixaines, vaut deux dixaines, ou vingt, que 3 qui se trouve au troisiéme rang, au rang des centaines, vaut trois cens, que quatre au quatriéme, au rang des mille, vaut quatre mille.

Par la même raison, ces sept chiffres 7654321 vaudront sept millions, six cens cinquante-quatre mille, trois cens vingt & un. Enfin, mettez-vous un zero après 1? 1 vaut dix; deux zero? 1 vaut cent; trois zero? mille; quatre zero? dix mille; cinq zero? cent mille; six zero? un million, &c.

3. *EUDOXE.* Sans doute, Ariste

s'eſt fait une idée juſte du Calcul.

Ariste. Le Calcul eſt l'art d'aſſortir des nombres, & d'en diſcerner le rapport; rapport qui ſe découvre par l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion.

Eudoxe. Hé bien, que penſez-vous de l'Addition?

4. *Ariste*. L'Addition, c'eſt une opération, qui comparant & ajoûtant enſemble des nombres connus, détermine le nombre total qui en réſulte, ou la ſomme.

Notre eſprit, qui eſt curieux, mais borné, voit aiſément la valeur particuliere de pluſieurs nombres ſimples ou peu compoſés, ſans en appercevoir la valeur totale, ou la ſomme. L'art, pour aider la foibleſſe de l'eſprit borné, mais curieux, diſpoſe dans un certain ordre les nombres connus, plaçant à droite, au premier rang, & les unes ſous les autres,

les unités ; au ſecond rang, & de même, les dixaines ; au troiſiéme, les centaines ; au quatriéme, les mille, &c. * On tire un trait deſſous ; & commençant par les unités, on en trouve ſans peine la ſomme partiale que l'on écrit ſous le rang ou la colonne des unités. Puis, on trouve avec la même facilité & l'on marque de même la ſomme des dixaines. On paſſe ainſi ſucceſſivement aux rangs des centaines, des mille, des dixaines de mille, &c. où l'on opére de la même façon. Et comme le tout & ſes parties, priſes enſemble, ſont même choſe, l'aſſemblage des ſommes partiales qu'on a trouvées ſéparément & ſans peine, préſente à l'eſprit ſatisfait la ſomme totale qu'on ne voyoit pas, & que l'on cherchoit.

* N. 2.

Par exemple, j'apperçois d'abord la valeur partiale de chacun des nombres peu compoſés 10,

11, 12, 13, ſans appercevoir la ſomme des nombres réunis. Pour la trouver, je mets ces nombres les uns ſous les autres, les unités ſous les unités, au premier rang à droite; les dixaines ſous les dixaines au ſecond.

10
11
12
13
46

Je tire un trait deſſous; & commençant par les unités de bas en haut ou de haut en bas, je dis, 3 & 2 font 5; 5 & 1 font 6; 6 & zero font 6, * je poſe 6, ſomme partiale des unités, ſous la colonne des unités. Puis, venant au ſecond rang, au rang des dixaines, je dis; 1 & 1 font 2; 2 & 1 font 3; 3 & 1 font 4, je poſe 4, ſomme partiale des dixaines, ſous les dixaines, & j'ai dans l'aſ-

* N. 2.

femblage 46 des fommes partiales la fomme totale que je cherchois, c'eft-à-dire, quarante-fix. Car 4 étant au rang des dixaines fignifie quatre dixaines d'unités, ou quarante unités; & 6 qui n'eft qu'au rang des unités, exprime précifément fix unités.

Par la même raifon, ces deux nombres compofés

	2452
	3225
donneront..	5677,

ou cinq mille, fix cens, foixante & dix-fept.

5. *EUDOXE*. Si la fomme partiale d'un rang ou d'une colonne eft 10 ?

ARISTE. Je pofe un zero fous ce rang, & je retiens 1, qui vaut une dixaine; je le retiens, dis-je, pour le tranfporter au rang fuivant où chaque chiffre vaut dix fois plus; où 1 dit une dixaine.*

* N. 2.

Opérons ſur ces deux nombres compoſés.

$$\begin{array}{r} 5679 \\ 4321 \\ \hline 10000 \end{array}$$

Après les avoir diſpoſés, comme les premiers, & tiré un trait deſſous, je dis : 1 & 9 font 10, c'eſt-à-dire, 10 unités, ou une dixaine. Je poſe ſous le rang des unités un zero, qui ſe montrant au premier rang, avertira qu'au rang ſuivant, 1 doit valoir dix fois plus. Je retiens donc 1, c'eſt-à-dire, une dixaine pour le rang des dixaines.

Puis, je dis : 1 que je retiens & 2 font 3, 3 & 7 font 10. Dix dixaines d'unités valent une centaine. Je poſe ſous le rang des dixaines un zero, qui dit ſeulement, que puiſqu'il eſt au ſecond rang, au rang ſuivant, 1 vaut dix fois plus, ou une centaine. Je retiens donc 1, ou une centaine

pour le rang des centaines.

Je passe au rang des centaines; & je dis : 1 que je retiens & 3 font 4, 4 & 6 font 10, c'est-à-dire, dix centaines, ou un mille. Je pose sous le rang des centaines un zero, pour m'avertir que le rang
* N. 2. suivant, est le rang des mille; * & je retiens 1, qui dit un mille.

Venons au rang des mille. 1 que je retiens & 4 font 5, 5 & 5 font 10. Une dixaine au rang des mille vaut dix-mille : je pose un zero sous le rang des mille; & je retiens 1, qui vaut une dixaine de mille, & que je place, comme il le mérite, au cinquiéme rang, c'est-à-dire, au rang des dix
* N. 2. mille. *

Ainsi, la somme entiere des
* N. 4. nombres proposés est dix mille. *

6. *EUDOXE.* Souvent la somme partiale d'une colonne de chiffres excede de quelques unités une dixaine, deux dixaines, &c.

ARISTE. Alors, je marque l'excès sous la colonne, & je retiens la dixaine ou les dixaines pour le rang suivant. Opérons sur ces quatre nombres composés :

992
864
405
981

3242

Je dis donc d'abord : 1 & 5 font 6, 6 & 4 font 10, 10 & 2 font 12. Je pose 2 sous les unités ; c'est l'excès de 12 sur 10 ; & je retiens 1, ou une dixaine pour le rang des dixaines.

Puis, je dis : 1 que je retiens & 8 font 9, 9 & zero, qui de lui-même n'a nulle valeur, * ne font que 9, mais 9 & 6 font 15, 15 & 9 font 24 ; ce sont 24 dixaines. Je pose 4, & je retiens 2 ; ce sont 2 dixaines de dixaines ou 2 centaines. Et je dis : 2 que je

* N. 2.

retiens & 9 font 11, 11 & 4 font 15, 15 & 8 font 23, 23 & 9 font 32, c'est-à-dire, 32 centaines, ou trois mille, deux cens. Je pose 2 sous les centaines, & je retiens 3, qui signifie 3 mille, & que je mets au quatriéme rang, au rang des mille.

Enfin, puisque les sommes partiales, prises ensemble, font la somme totale, j'ai trois mille deux cens quarante-deux. Et ce seront, si vous le voulez, 3242 livres, ou 3242 Soldats bien aguéris, ou....

Eudoxe. Ce sera tout ce qui vous plaira; mais ne pourrions-nous pas trouver un peu plus prestement la somme de ces nombres plus composés encore.

7589710
5497920
3389820
4278240
3281010
―――――――
24036700

Ariste. Zero réïtéré ne donne que zero *: je pose 0; 1 & 4 font 5, & 2 font 7, & 2 font 9, & 1 font 10; je pose 0 & retiens 1. *

* N. 2

* N. 3

1 & 0 font 1, & 2 font 3, & 8 font 11, & 9 font 20, & 7 font 27; je pose 7, & retiens 2.

2 & 1 font 3, & 8 font 11, & 9 font 20, & 7 font 27, & 9 font 36; je pose 6 & retiens 3.

3 & 8 font 11, & 7 font 18, & 8 font 26, & 9 font 35, & 8 font 43; je pose 3, & retiens 4.

4 & 2 font 6, & 2 font 8, & 3 font 11, & 4 font 15, & 5 font 20; je pose 0, & retiens 2.

2 & 3 font 5, & 4 font 9, & 3

ſont 12, & 5 ſont 17, & 7 ſont 24; je poſe 4 & retiens 2, que je mets au rang ſuivant.

Et nous avons vingt-quatre millions, trente-ſix mille, ſept cens; ce ſeront, ſi vous le voulez, autant de livres, d'écus, ou de Loüis.

7. *EUDOXE.* Nous n'en ſerions pas plus riches. Suppoſons plutôt qu'il ne s'agit pas ſeulement de nombres entiers, ou qui ne contiennent que des quantités d'une eſpéce, comme des livres, ou des toiſes, ou des heures; mais qu'il eſt queſtion de termes qui diſent des quantités de pluſieurs eſpéces, comme des livres, des ſols, des deniers; ou des toiſes, des pieds, des pouces, &c.

ARISTE. Je prens d'abord la ſomme partiale des plus petites quantités pour la joindre aux ſuivantes, ſi elle peut les égaler. Les deniers ne ſuffiſent-ils pas pour faire des

des ſols ? Je marque ſous le rang des deniers la ſomme préciſe des deniers. Suffiſent-ils pour faire des ſols ſans reſte, ſans excès ? Je retiens les ſols que je tranſporte au rang des ſols, ſans rien marquer ſous le rang des deniers, ou je n'y mets qu'un zero pour m'avertir que leur valeur eſt paſſée au rang des ſols. Les deniers donnent-ils des ſols avec quelque excès, quelques deniers de reſte ? Le reſte ſe marque ſous le rang des deniers.

J'en uſe de même à l'égard des ſols. S'ils ne font pas une livre réunis enſemble, j'écris la ſomme préciſe des ſols ſous la colonne des ſols. S'ils font une livre, ou pluſieurs préciſément, je ne mets rien, ou je poſe, au plus, un zero ſous la colonne des ſols ; & je retiens une livre ou pluſieurs pour le rang des livres. Les ſols valent-ils une livre ou pluſieurs

avec quelques sols de reste ? Le reste se place au rang des sols.

EUDOXE. Hé bien, je vous suppose quatre fonds qui vous valent,

le 1^{r}.	8553^{l}.	16^{s}.	6^{d}.
le 2e.	9485.	8.	7.
le 3e.	1750.	9.	8.
le 4e.	5433.	10.	9.
	25223.	5.	6.

Quelle est la somme totale & précise de votre revenu ?

ARISTE. Commençons par les deniers. 9 & 8 font 17, & 7 font 24, & 6 font 30. Or, 30 deniers valent 2 sols, 6 deniers, puisqu'un sol vaut 12 deniers. Je pose 6, ou 6 deniers, sous le rang des deniers, & retiens 2, c'est-à-dire, 2 sols pour le rang des sols.

Puis, passant au premier rang des sols, je dis : 2 que je retiens & 0 font 2, & 9 font 11, & 8 font 19, & 6 font 25. Or, 25 sols font 2 dixaines de sols & 5 sols.

Je poſe 5 ſous le rang des unités des ſols, & retiens 2, ou 2 dixaines de ſols, pour le rang des dixaines de ſols.

2 & 1 font 3, & 1 font 4. Mais 4 dixaines de ſols font 2 livres que je réſerve pour le premier rang des liv. On trouveroit la même choſe en opérant au même temps & ſur les unités & ſur les dixaines de ſ.

Paſſons au premier rang des livres. 2 que je retiens & 3 font 5, & zero font 5, & 5 font 10, & 3 font 13. Je poſe 3 & retiens 1.

1 & 3 font 4, & 5 font 9, & 8 font 17, & 5 font 22. Je poſe 2, & retiens 2.

2 & 4 font 6, & 7 font 13, & 4 font 17, & 5 font 22. Je poſe 2 & retiens 2.

Enfin, 2 & 5 font 7, & 1 font 8, & 9 font 17, & 8 font 25. Je poſe 5, & 2 avant 5. * * N. 2.
Donc la ſomme totale eſt 25223 l. 5 ſ. 6 d. * * N. 5.

C'eſt-à-dire, que vous me donnez juſtement vingt-cinq mille-deux cens vingt-trois livres, cinq ſols, ſix deniers de rentes.

Eudoxe. Je voudrois être en état de vous les aſſurer : mais c'en ſeroit trop pour devenir un profond Mathématicien, il y a peu de Marquis de l'Hôpital. L'exemple du Marquis de l'Hôpital eſt rare. Aſſez ordinairement, une perſonne qui ſe livre aux Mathématiques, eſt moins occupée du ſoin de calculer ſes revenus, que de la penſée de ſupputer les heures, les minutes, les ſecondes, les tierces.

On ſçait que l'heure contient 60 minutes; la minute 60 ſecondes; la ſeconde 60 tierces; & un Phénomene a paru dans le Ciel à diverſes repriſes pendant

10 heu.	20 min.	22 sec.	24 tier.
12	21	22	22
13	25	24	23
36	7	9	9

Quelle eſt la ſomme de ces apparitions ?

Ariste. Ajoutons en même temps les dixaines & les unités des tierces, puis, des ſecondes, ou des minutes ; & nous irons plus rapidement.

Je dis donc : 23 & 22 font 45 ; & 24 font 69 ; c'eſt-à-dire, 9 tierces & une ſeconde. Je poſe 9 ſous les unités des tierces, & retiens 1 ou une ſeconde.

1 & 24 font 25, & 22 font 47 ; & 22 font 69 ; c'eſt-à-dire, 9 ſecondes & 1 minute. Je poſe 9 ſous les unités des ſecondes, & retiens 1.

1 & 25 font 26, & 21 font 47 ; & 20 font 67, c'eſt-à-dire, 7 minutes & 1 heure. Je poſe 7 ſous

les unités des minutes, & retiens 1 pour le premier rang des heures.

1 & 3 font 4, & 2 font 6, & zero font 6, c'eſt-à-dire, 6 heures. Je poſe 6.

Enfin, 1 & 1 font 2, & 1 font 3. Je poſe 3.

Donc la ſomme des apparitions comprend trente-ſix heures, ſept minutes, neuf ſecondes & neuf tierces.

Et comme 1 toiſe contient 6 pieds; 1 pied, 12 pouces; 1 pouce, 12 lignes, on verra bientôt par la même maniére d'opérer, que

	toiſ.	pié.	pou.	lig.
	7	4	9	9
	6	5	8	8
	5	4	7	7
* N. 7. donneront . .	20	3	2	0 *

EUDOXE. Ainſi, l'Addition, ajoutant nombre à nombre dévoile la vérité. La Souſtraction qui

ôte un nombre d'un nombre, & dont j'eſpere que nous parlerons bientôt, ne ſert pas moins à la découvrir.

II. ENTRETIEN.

Sur la Souſtraction.

8. *Eudoxe*. HE bien, Ariſte, vous allez donc vous expliquer ſur la Souſtraction?

Ariste. C'eſt une opération qui retranchant un nombre d'un nombre, fait voir ce qui reſte; & le reſte, s'il y en a, exprime la différence des deux nombres.

9. *Eudoxe*. Sçaurai-je votre maniere de ſouſtraire?

Ariste. Je mets d'abord le nombre à ſouſtraire ſous le nombre d'où je veux l'ôter, les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, &c. Puis, commençant

par les unités, pour aller de la droite à la gauche, j'ôte les unités des unités; j'écris le reste dessous, retenant & transportant les dixaines, comme dans l'Addition.

Des unités, je passe aux dixaines; des dixaines, aux centaines; &c. opérant de la même façon; & la somme totale des restes particuliers est le reste total. Le reste total, ou le reste partial des unités, & le reste partial des dixaines, pris ensemble, c'est même chose; le tout n'est que l'assemblage des parties.

de . . 4589
ôtons 2345 : que restera-t-il ?

Après avoir tiré une ligne, je dis :

De 9, ôtez 5 : reste 4; je pose 4 sous les unités.

De 8, ôtez 4 : reste 4; je pose 4 sous les dixaines.

De

De 5, ôtez 3 : reste 2 ; je pose 2 sous les centaines.

De 4, ôtez 2 : reste 2 ; je pose 2 sous les mille.

donc, si de 4589
on retranche 2345,
le reste, ou la différence, sera 2244.

10. *EUDOXE*. Si d'un nombre, on ôte un nombre égal. . . .

ARISTE. Point de reste, & pour marquer qu'il ne reste rien, on pose un zero dessous. Faut-il de

54
ôter 34?
20.

je dis : de 4 ôtez 4 : rien de reste, ou le reste est zero*; je pose 0. * N. 2

De 5, ôtez 3 : reste 2 : je pose 2. Et le reste total, ou la différence, est 20.* * N. 9.

11. *EUDOXE*. Et s'il s'offre un zero à retrancher d'un zero . . . .

ARISTE. Je pose 0 ; rien ne four-

niſſant rien, ne donne point de reſte.

12. *EUDOXE*. Mais, ſouvent le nombre partial à retrancher ſe trouve plus grand que le nombre partial d'où il faut l'oter; quelquefois même le chiffre ſupérieur n'eſt qu'un zero....

ARISTE. Alors, 1°. Je ſuppoſe & j'ajoute, ſoit au nombre trop petit, ſoit au zero, 1 dixaine à tirer du chiffre ſuivant. 2°. De la ſomme nouvelle, j'ôte le nombre à retrancher & marque le reſte partial. 3°. Ayant retenu pour le rang ſuivant la dixaine ſuppoſée, je la tire avec le chiffre de deſſous du chiffre de deſſus. Ainſi, comme je tire enfin d'un nombre réel le ſupplément que j'ai ſuppoſé, le reſte eſt le véritable reſte.

Si de 43
il faut ôter 34

09.

Je dis : ôter 4 de 3, cela ne ſe peut ; 4 n'eſt pas contenu dans 3.

Je ſuppoſe 1 à tirer de 4, ou 1 dixaine que je joins à 3, ſur lequel je fais un point pour me ſouvenir de la ſuppoſition, ou de l'addition, & je dis : ôtez 4 de 13 : reſte 9 ; je poſe 9, & retiens 1, c'eſt-à-dire 1 dixaine d'unités, que j'ai ſuppoſée & qu'il faut tirer d'un nombre réel qui doit la fournir, la prêter.

Enſuite, paſſant au ſecond rang, je dis : 1 que je retiens & 3 font 4 ; ôtez 4 de 4 : point de reſte ; je poſe 0.

Ainſi, le reſte eſt 09 ou 9. * * N. 2

13. *EUDOXE.* Mais ſi le chiffre ſuivant eſt un zero, que pourra-t-il vous prêter ?

ARISTE. Rien : mais 1°. je ſuppoſe 1 qui avec 0 fait 1 dixaine de dixaines à tirer d'un nombre ſuivant. 2°. De la dixaine de dixaines, je retranche le nombre partial

inférieur avec le nombre déja retenu. 3°. Retenant 1ou 1 dixaine, je l'ôte de même du nombre suivant.

De..	402
ôtons	323
	79.

Je dis donc : ôtez 3 de 2, cela ne se peut. Faisant un point sur 2, je suppose 1, ou 1 dixaine, qui avec 2 fait 12 : de 12, ôtez 3 : reste 9 ; je pose 9 & retiens 1, c'est-à-dire une dixaine que j'ai supposée.

Puis, passant au second rang, je dis : 1 que je retiens & 2 font 3. 3 n'est point dans zero. Faisant donc encore un point sur 0, je suppose 1, qui joint à zero fait 10, 1 dixaine de dixaines, ou 1 centaine à tirer du nombre suivant. & je dis: de 10, ôtez 3 : reste 7, & je retiens 1, c'est-à-dire 1 centaine.

Enfin, venant au troisiéme rang, je dis: 1 & 3 font 4. Otez 4 de 4: le reste partial est zero, & le reste total 79. * *N. 9.

14. EUDOXE. Réunissons dans un exemple les diverses circonstances de l'opération.

De..	90450
ôtons	52550
	37900.

ARISTE. Otez zero de zero; rien de rien: le reste est o. * Je *N.11. pose o.

Otez 5 de 5: point de reste; je pose o. * *N.10.

On n'ôte point 5 de 4. Je suppose 1, c'est-à-dire 1 dixaine de centaines, qui avec 4 fait 14. De 14, ôtez 5: reste 9; je pose 9, & retiens 1. * *N.12.

1 & 2 font 3. Ne pouvant ôter 3 de zero, je suppose 1, c'est-à-dire 1 dixaine de mille; & je dis:

de 10, ôtez 3 : reſte 7 ; je poſe 7, & retiens 1.

Enfin, 1 & 5 font 6. De 9, ôtez 6 : reſte 3 ; je poſe 3.

Et le reſte total ou la différence, *N. 9. eſt 37900.*

S'il y avoit pluſieurs zero de ſuite ſur pluſieurs nombres à ſouſtraire, la même opération donneroit la différence.

15. *EUDOXE.* Je le conçois; le premier nombre ſuppoſé ou le premier ſupplément étant contenu dans le deuxiéme; le deuxiéme dans le troiſiéme, &c. & celui-ci dans un nombre réel, ils ſe trouvent tous dans le nombre total de deſſus. Ainſi, l'on n'en retranche que ce qui s'y trouve; & l'aſſemblage des reſtes eſt le reſte total.

Mais il y a, ce ſemble, une autre maniere d'opérer, aſſez ordinaire.

Si le nombre partial à ſouſtraire

n'eſt pas contenu dans le chiffre de deſſus, elle emprunte du nombre ſuivant 1 dixaine, & le nombre qui prête la dixaine diminue d'autant. S'il y a pluſieurs zero intermédiaires, ou compris entre un chiffre augmenté & le nombre diminué, on leur donne à chacun la valeur de *9*, écrite quelquefois deſſus; & ces valeurs, priſes enſemble, avec la dixaine ajoutée au nombre augmenté, font une partie du nombre qui les prête & diminue d'autant.

Ariste. Un exemple répandra du jour ſur cette façon de ſouſtraire.

Eudoxe. Si de 6001
il faut ôter...... 5432,

569.

1°. Je dis: on n'ôte pas 2 de 1; j'emprunte du *6*, 1, c'eſt-à-dire, une dixaine d'unités, laquelle étant

jointe à 1 fait 11, & je dis : ôtez 2 de 11 : reste 9.

2°. Les deux zero, je les fais valoir chacun 9, que je marque ou puis marquer dessus. Le premier allant de la droite à la gauche signifiera 9 dixaines; l'autre 9
* N. 2. centaines * : or, 9 centaines d'unités, plus 9 dixaines, plus 1 dixaine font 1 mille, tiré du nombre
* N. 2. suivant 6 qui vaut 6 mille * : ainsi 6 ne vaudra plus que 5; & pour soulager la mémoire, on écrit 5, sur 6 effacé.

3°. Je continue, & dis : ôtez 3, de 9 : reste 6 : 4, de 9 : reste 5 : 5, de 5 : point de reste, & le reste total sera 569.

ARISTE. C'est-à-dire, que dans les deux manieres on suppose & l'on emprunte un peu différemment, pour trouver avec la même certitude, la même vérité.

16. EUDOXE. Enfin, s'il s'agit de soustraire, non-seulement des

nombres entiers, comme des livres, des heures, ou des toises; mais des parties de ces nombres, comme des sols, des deniers; ou des minutes, des secondes, des tierces; ou des pieds, des pouces, des lignes....

Ariste. Je mets les nombres entiers sous les nombres entiers, les parties sous les parties: les livres sous les livres, les sols sous les sols, les deniers sous les deniers; les heures sous les heures, les minutes sous les minutes, les secondes sous les secondes, &c. & commençant par les plus petites quantités, j'opére sur elles comme sur les plus grandes.

on vous devoit	950 l.	15 s.	6 d.
on vous a payé	560	7	3.
	390	8	3.

Voyons ce que l'on vous doit encore, & commençons par les deniers.

De 6, ôtez 3 : reste 3.

Passons aux sols. De 15, ôtez 7 : reste 8.

Venons aux livres. Otez zero de zero, c'est ne rien ôter ; reste o.

On n'ôte pas 6 de 5. Je suppose 1 dixaine à tirer de 9, & qui avec 5 fait 15. De 15, ôtez 6 : reste 9 ; & je retiens 1.

1 & 5 font 6, ôtez 6 de 9 : reste 3.

Si au lieu de supposer 1 dixaine à tirer de 9, j'emprunte, comme vous avez fait, après avoir réduit 9 à 8, ou écrit 8 sur 9, je dirai : de 15, ôtez 6 : reste 9. Enfin, sans rien retenir, je dirai : de 8, ôtez 5 : reste 3.

Ainsi, les deux méthodes conspirent également à démontrer qu'il vous est dû de compte fait, 390 livres, 8 sols, 3 deniers.

17. *Eudoxe.* La dette est démontrée sans doute ; & vous prou-

veriez la bonté de la Souſtraction par l'Addition.

Ariste. Il eſt clair que la ſomme totale du nombre retranché & du nombre qui reſte, eſt égale au nombre qui les a fournis. Donc ſi l'on ajoute le nombre qui reſte, avec le nombre retranché, & que la ſomme de l'Addition ſe trouve la même que celle qui les a fournis, ces nombres, l'opération eſt bonne.

nombre........ 25323.
nombre ſouſtrait 15323.
reſte......... 10000.

Prouvons par l'Addition la bonté de cette Souſtraction.

0 & 3 font 3; 0 & 2 font 2; 0 & 3 font 3; 0 & 5 font 5; 1 & 1 font 2.

Donc la ſomme du nombre qui reſte, 10000, & du nombre ſouſtrait 15323, eſt 25323, la même que celle qui a fourni les deux

nombres; & l'opération est bonne.

Ainsi, l'Addition sert à prouver la bonté de la Soustraction.

18. A son tour, la Soustraction prouvera la justesse de l'Addition.

Car la somme totale de l'Addition doit égaler toutes les sommes partiales des nombres addi-
* N. 4. tionnés. * Donc, si de la somme totale de l'Addition l'on ôte toutes les sommes partiales, il ne
* N. 10. restera rien *; le tout, & les parties prises ensemble, étant même chose. Et par le même principe, s'il ne reste rien, la somme totale égalera les sommes partiales prises ensemble; & l'opération sera juste.

nombres additionnés	15223.
	13723.
somme	28946.
reste	00000.

Sans déranger les chiffres, re-

tranchons de la somme les nombres additionnés.

Je dis donc : 3 & 3 font 6. ôtez 6 de 6 : reste 0.

2 & 2 font 4. ôtez 4 de 4 : reste 0.

2 & 7 font 9. ôtez 9 de 9 : reste 0.

5 & 3 font 8. ôtez 8 de 8 : reste 0.

1 & 1 font 2. ôtez 2 de 2 : reste 0.

Et puisqu'il ne reste rien, l'Addition est bonne.

On peut mettre sous la somme de l'Addition les nombres additionnés, pour trouver le reste par la Soustraction ; & l'on aura

somme	28946.
nombres additionnés & retranchés	15223.
	13723.
reste	00000.

EUDOXE. Nous touchons à la

Multiplication ; & je compte qu'elle sera bientôt une occasion de vous revoir dans mon Cabinet.

III. ENTRETIEN.

Sur la Multiplication.

19. *EUDOXE.* SI je ne me trompe, Ariste, il s'agit de la Multiplication.

ARISTE. C'est une opération qui prenant un nombre autant de fois que l'unité se trouve dans un nombre, découvre le nombre qui en résulte. Si je dis : 4 pris 3 fois, ou autant de fois que l'unité se trouve dans 3, donne 12, c'est tripler 4, c'est multiplier 4 par 3. Le nombre qu'on multiplie, est *le nombre à Multiplier* ; le nombre par lequel on multiplie, est le *Multiplicateur* ; le nombre qui résulte de

l'opération, c'eſt *le produit*. Quand je dis : 4 pris 3 fois fait 12, 4 eſt le nombre à multiplier; 3, le multiplicateur; 12, le produit.

20. De-là, 1°. Si l'on multiplie 1 par 1, le produit eſt 1; puiſque 1 pris une fois eſt 1.

2°. Que l'on multiplie le premier nombre par le ſecond, ou le ſecond par le premier, c'eſt même choſe, le produit 1 eſt le même.

Car, 2 eſt 1 plus 1; & 1 multiplié par 1 donne 1. Cela poſé; 1 plus 1 multiplié par 1, égale 1 plus 1; & 1 multiplié par 1 plus 1, égale de même 1 plus 1. Ainſi, multipliant chaque unité du premier nombre par chaque unité du ſecond, ou au contraire; on aura même produit: or, qu'on multiplie le premier par le ſecond, ou le ſecond par le premier; on multiplie dans le fond chaque unité de l'un par chaque unité de l'autre,

Donc si l'on multiplie le premier par le second, ou le second par le premier; le produit est le même: aussi, 3 par 4, ou 4 par 3, donne 12.

Enfin, si l'on multiplie par zero, le produit sera zero.

21. *EUDOXE.* Votre maniere d'opérer ?

ARISTE. 1°. Je mets le Multiplicateur sous le nombre à multiplier, les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c. avec un trait sous le Multiplicateur.

2°. Allant de la droite à la gauche, je multiplie successivement tous les termes du nombre à multiplier par les unités du Multiplicateur, puis par les dixaines, s'il y en a, ensuite par les centaines, &c. Car multiplier le premier nombre par le second, c'est prendre chaque terme du premier autant de fois que l'unité se trouve,

&

& dans les unités du second, & dans les dixaines, &c.* Mulipier, * N. 19. par exemple, 24 par 6, c'est prendre 24, ou 4 signifiant des unités, puis 2 qui signifie 2 dixaines ou 20, autant de fois que l'unité est contenue dans 6. Multiplier 35 par 24, c'est prendre 35 ou 5, & 3 qui vaut 3 dixaines, autant de fois que l'unité est dans 4 qui dit des unités, puis dans 2 qui signifie des dixaines.

3°. J'observe que les unités multipliées par les dixaines, par les centaines, &c. ou au contraire; donnent des dixaines, ou des centaines, &c. les dixaines par les dixaines des centaines; les dixaines par les centaines des mille, &c.

4°. J'écris les unités des produits sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c. comme dans l'Addition.

Enfin, j'additionne les produits

particuliers ; & la ſomme de ces produits eſt le produit total : parce que le tout, & ſes parties priſes enſemble, ſont même choſe.

Multiplions 24.
par 6.

144.

1°. Ayant mis 6 ſous 4, je dis : 4 fois 6, ou 6 fois 4, font 24*; je poſe 4 ſous le rang des unités, & retiens 2, c'eſt-à-dire, 2 dixaines.

* N. 20.

2°. Je dis : 2 fois 6, ou 6 fois 2, font 12, & 2 que je retiens, font 14, qui ſont 14 dixaines ; je poſe 4 au ſecond rang*, & retiens 1, ou une centaine, que je place au troiſiéme rang.

* N. 2.

Ainſi, je trouve que le produit de 24 par 6, eſt 144.

Multiplierons-nous 35
par 24 ?

```
 140
 70
 840.
```

C'eſt multiplier ſucceſſivement 5 par 4, 3 par 4, 5 par 2, 3 par 2.

Je dis donc d'abord : 4 fois 5 font 20 ; je poſe 0 ſous le rang des unités, & retiens 2, c'eſt-à-dire 2 dixaines, pour le ſecond rang.* *N. 2.

2°. Je dis : 4 fois 3 font 12, & 2 que je retiens, font 14, c'eſt-à-dire 14 dixaines, ou 4, plus une centaine. Je poſe 4 au ſecond rang, & 1 au troiſiéme.* *N. 2.

3°. Venant au ſecond chiffre du Multiplicateur, je dis : 2 fois 5 font 10, c'eſt-à-dire 10 dixaines, puiſque 2 dit des dixaines.

Je poſe 0 au ſecond rang, & retiens 1, qui eſt une dixaine de dixaines, ou une centaine.

4°. Je dis : 2 fois 3 font 6, c'eſt-à-dire 6 dixaines de dixaines, ou 6 centaines ; puiſque les dixaines par les dixaines donnent des centaines : or, 6 & 1 que je retiens, font 7 ; je poſe 7 au troiſiéme rang.

5°. Additionnant les produits particuliers, je dis : zero ne fait que zero ; je poſe 0.

Zero & 4 font 4 ; je poſe 4.

* N. 4. 7 & 1 font 8 ; je poſe 8. *

Enfin, les produits particuliers pris enſemble, valent le produit total : donc ce produit eſt 840.

Faut-il multiplier 4565
par 3424 ?

```
    18260
    9130
   18260
  13695
 15630560.
```

C'eſt multiplier ſucceſſivement chaque terme de 4565 par 4, par 2, par 4, par 3. Et ſuivant les

principes que nous avons établis, je dis d'abord : 4 fois 5 font 20 ; je pose 0, & retiens 2. * 4 fois 6 font 24, & 2 que j'ai retenu, font 26 ; je pose 6, & retiens 2. 4 fois 5 font 20, & 2 que j'ai retenu, font 22, ou 22 centaines ; je pose 2, & retiens 2, ou 2 mille. 4 fois 4 font 16, & 2 que j'ai retenu, font 18 ; ce sont des mille ; je pose 8 au quatriéme rang, & retiens 1 que je mets au cinquiéme rang. *

* N. 41

* N. 2.

2°. Je dis : 2 fois 5 font 10, qui sont 10 dixaines d'unités ; je pose 0, au second rang, & retiens 1. * 2 fois 6 font 12, & 1 que j'ai retenu, font 13 ; je pose 3, & retiens 1. 2 fois 5 font 10, & 1 font 11 ; je pose 1, & retiens 1. 2 fois 4 font 8, & 1 font 9 ; je pose 9.

* N. 5.

3°. Je dis : 4 fois 5 font 20, qui sont des centaines ; je pose 0 au troisiéme rang, * & retiens 2. 4 fois 6 font 24, & 2 que j'ai retenu, font 26 ; je pose 6, & retiens 2.

* N. 2.

4 fois 5 font 20, & 2 font 22; je pose 2, & retiens 2. 4 fois 4 font 16, & 2 font 18; je pose 8, & retiens 1 que j'écris au rang suivant.

4°. Je dis: 3 fois 5 font 15, ou 15 mille unités; je pose 5 au qua-
*N. 2. triéme rang, * & retiens 1. 3 fois 6 font 18, & 1 que j'ai retenu, font 19; je pose 9, & retiens 1. 3 fois 5 font 15, & 1 font 16; je pose 6, & retiens 1. 3 fois 4 font 12, & 1 font 13; je pose 3, & mets 1 au rang suivant.

5°. Ajoutant ensemble les produits particuliers, je dis: zero seul fait zero; je pose o.

Zero & 6 font 6; je pose 6.

Zero, 3 & 2 font 5; je pose 5.

5 & 6 font 11, & 1 font 12, & 8 font 20; je pose o, & retiens 2.

2 & 9 font 11, & 2 font 13, & 9 font 22, & 1 font 23; je pose 3 & retiens 2.

2 & 6 font 8, & 8 font 16; je

pofe 6, & retiens 1.

1 & 3 font 4, & 1 font 5; je pofe 5.

Enfin, 1 fe trouve feul; & je pofe 1.

Voilà l'opération achevée.

Donc le produit de 4565 par 3424, eft 15630560.

22. *Eudoxe*. Et fi les nombres étoient plus grands, l'opération feroit la même.

Mais s'il fe trouve quelque zero inféré entre les chiffres du Multiplicateur......

Ariste. Alors, le produit par zero n'étant que zero *, je pofe o dans le rang naturel des produits particuliers, pour conferver au produit fuivant, fon rang & fa valeur. * N 20.

S'il faut multiplier 456
par 203,

	1368
	9120
	92568.

1°. Je dis : 3 fois 6 font 18 ; je pose 8, & retiens 1. 3 fois 5 font 15, & 1 font 16 ; je pose 6 & retiens 1. 3 fois 4 font 12, & 1 font 13 ; je pose 3, & 1 devant 3.

2°. Si je multiplie par zero 6, puis 5 & 4, j'aurai trois zero, qui serviront précisément à m'avertir de reculer d'un rang le produit suivant, ou de commencer à le placer après le premier zero, c'est-à-dire au troisiéme rang. Or au-lieu de faire cette Multiplication inutile, il suffit de mettre un zero d'abord au second rang, & de commencer à poser le troisiéme produit immédiatement après le zero ; ce produit sera reculé d'un rang.

Ayant

Ayant donc mis ſimplement un zero au ſecond rang, je dis: 2 fois 6 font 12; je poſe 2 au troiſiéme rang, & retiens 1. 2 fois 5 font 10, & 1 font 11; je poſe 1, & retiens 1. 2 fois 4 font 8, & 1 font 9; je poſe 9.

Enfin, l'addition des produits donnera 92568.

Par le même principe, s'il ſe rencontre quelque zero entre les chiffres du nombre à multiplier, quand il s'agit de multiplier ce zero par un nombre ſimple; je poſe zero, ou, ce qui a le même effet, ſi j'ai retenu quelque nombre, je le mets à la place de zero.

De-là, ſi l'on multiplie	60504
par	2,
le produit ſera . . .	121008,

23. *Eudoxe.* Mais, ſi au commencement du nombre à multiplier, ou du Multiplicateur, ou de

l'un & de l'autre, il se trouvoit un zero, ou plusieurs . . . .

Ariste. Je ne ferois que multiplier les nombres par les nombres, & ajouter au produit total de ces nombres les zero.

Eudoxe. Hé pourquoi ?

Ariste. Multiplions d'abord

$$\begin{array}{r} 40 \\ \text{par} \quad \underline{2.} \\ 80. \end{array}$$

Je puis dire : 2 fois 0 font 0 ; & poser 0 au premier rang ; puis, dire : 2 fois 4 font 8, & mettre 8 au second rang. J'aurai ce produit 80.

Dans cette opération, le zero qui se trouve au premier rang, ne sert qu'à déterminer le rang & la valeur du produit des nombres, le fixant au second rang. De-là, si sans opérer sur le zero, je dis d'abord ; 2 fois 4 font 8 ; & qu'ayant

mis 8 sous le second rang, j'écrive zero sous le premier; j'ai le même produit, sçavoir 80, parce que le zero fait reculer le produit de même, ou d'un pas.

Multiplions encore	40
par	20.
	00
	80
	800.

Je puis dire en opérant sur les zero; zero par zero donne zero; je pose o.

Zero par 4, ou 4 par zero donne zero; je pose o. * *N. 20.

2 fois zero font zero; je pose o au second rang. * *N. 21.

2 fois 4 font 8; je pose 8 au troisiéme rang. * *N 21.

Dans cette opération, les deux zero mis, l'un au commencement du nombre à multiplier, l'autre au commencement du Multi-

plicateur, ne font que déterminer le rang & la valeur du produit des nombres, le fixant au troisiéme rang.

De-là, si sans opérer sur les deux zero, je dis d'abord : 2 fois 4 font 8, & que j'ajoute à ce produit les deux zero, j'ai le même produit, sçavoir 800.

Ainsi, chaque zero mis au commencement, soit du nombre à multiplier, ou du Multiplicateur, ne sert qu'à reculer d'un pas les produits des nombres, faisant valoir les produits dix fois plus. Deux zero ne servent qu'à les reculer de deux pas, ou de deux rangs, les faisant valoir cent fois plus, &c.

Par conséquent, si l'on multiplie précisément les nombres, & qu'on ajoute aux produits des nombres les zero qui peuvent se trouver au commencement de ces nombres ; on aura dans la somme le produit total.

S'il faut multiplier 100
par 100,
10000.

Je dis : 1 pris une fois eſt 1 ; je poſe 1 précédé des quatre zero, & 10000 eſt le produit.

24. Produit, qui eſt un quarré, dont la racine quarrée eſt 100: car le produit d'un nombre par lui-même eſt un quarré ; & le nombre, qui multiplié par lui-même donne le quarré, en eſt la racine quarrée : ainſi 4, produit de 2 par 2, eſt quarré de 2 ; & 2, racine quarrée de 4.

Faut-il multiplier 10000
par 100 ?
1000000.

Multipliant 1 par 1, j'écris le produit 1 précédé des ſix zero, & le produit eſt un million. * *N. 23.

25. Produit, qui eſt un cube,

dont la racine cubique eſt 100 : car le produit d'un quarré par ſa racine eſt un cube ; & la racine qui multipliant le quarré donne le cube, en eſt la racine cubique : ainſi 8, produit du quarré 4 par 2, eſt cube de 2 ; & 2, racine cube de 8. (*a*)

26. *EUDOXE*. De ce que vous avez dit, Ariſte, il ſuit, ce ſemble, que pour multiplier un nombre par 10, il ſuffit d'ajouter au nombre même un zero : car un zero faiſant reculer tous les chiffres d'un pas, il rend la valeur de chacun des nombres dix fois plus

* *N.* 2. grande. *

Par la même raiſon, pour multiplier un nombre par 100, il ſuffira d'ajouter à ce nombre deux zero ; par 1000, trois zero ; par 10000, quatre zero ; par 100000,

(*a*) Un nombre ſimple multiplié par un nombre ſimple différent, ſera un plan, un rectangle.

cinq zero ; par un million, six zero, &c.

27. Mais, je suppose maintenant que nous ayons à multiplier par un nombre simple des quantités de différentes espéces, par exemple des livres, des sols, & des deniers ; ou des toises, des pieds, des pouces ; ou des heures, des minutes, des secondes, &c.

Ariste. J'irai du moins au plus, des plus petites espéces aux plus grandes ; des deniers aux sols ; des sols aux livres ; ou des pouces aux pieds ; des pieds aux toises, &c. Je multiplierai donc successivement par le même Multiplicateur, les deniers, les sols, les livres ; & si le produit des deniers donne des sols, je retiendrai les sols précisément pour les joindre aux sols ; si le produit des sols donne des livres, je retiendrai les livres précisément pour les ajouter aux li-

vres. J'en uſerai de même dans la Multiplication des toiſes, des pieds, des pouces, &c. & les produits particuliers, pris enſemble, donneront le produit total.

La toiſe quarrée d'un ouvrage vaut 20 liv. 5 ſ. 6 d. Combien vaudront 8 toiſes? Cette valeur ſera le produit

de	20$^{l.}$	5$^{ſ.}$	6^{d}
par	8.		
	162	4.	

Je dis donc : 8 fois 6 font 48; 48 deniers font 4 ſols; je poſe un zero ſous les deniers, pour m'avertir que j'ai opéré ſur eux, ou ſans poſer le zero, je retiens 4, c'eſt-à-dire 4 ſols.

Venons au rang des ſols. 8 fois 5 font 40, & 4 que j'ai retenu, font 44. Or, 44 ſols font 2 livres & 4 ſols; je poſe 4 ſous les ſols, & retiens 2, c'eſt-à-dire 2 livres, pour les ajouter au produit des livres.

Paſſons aux livres : 8 fois zero font zero; je poſe 2 ſous le premier rang des livres , c'eſt-à-dire les deux livres que j'ai retenuës.

Enfin, 8 fois 2 font 16 ; je poſe 6 au ſecond rang des livres, & 1 au troiſiéme ; & la valeur des 8 toiſes ſera 162 liv. 4 ſ.

Quel ſera le produit

de 1 toiſ. 2 pié. 6 pou.
par 4 ?

5 4.

4 fois 6 font 24 ; 24 pouces font 2 pieds; je retiens 2, c'eſt-a-dire 2 pieds.

4 fois 2 font 8, & 2 font 10 ; 10 pieds font une toiſe & 4 pieds ; je poſe 4 ſous le rang des pieds, & retiens 1, c'eſt-à-dire une toiſe.

Enfin, 4 fois 1 font 4 , & 1 font 5.

Donc le produit ſera 5 toiſes, 4 pieds.

EUDOXE. Cherchons le produit

de	2 heu.	30 min.	30 sec.
par	7.		
	17	33	30.

ARISTE. Commençant par les ſecondes, je dis: 7 fois zero font zero; je poſe o.

7 fois 3 font 21, c'eſt-à-dire
N. 21. 21 dixaines de ſecondes, ou 3 minutes, plus 30 ſecondes; je poſe 3 au rang des dixaines de ſecondes, & retiens 3, c'eſt-à-dire 3 minutes.

Puis venant aux minutes, je dis: 7 fois zero & 3 que j'ai retenu, font 3; je poſe 3. 7 fois 3 font 21, c'eſt-à-dire 21 dixaines de minutes, ou 3 heures & 3 dixaines de minutes; je poſe 3 & retiens 3 pour le rang des heures.

Enfin paſſant aux heures, je dis: 7 fois 2 font 14, & 3 font 17; & je trouve 17 heures, 33 minutes, 30 ſecondes.

Enfin, si le Multiplicateur contient deux chiffres, ou davantage, je fais attention que le produit des unités par les dixaines exprime des dixaines; & le produit des dixaines par les dixaines, des centaines, &c.

28. *Eudoxe.* On peut réduire les grandes espéces à de plus petites par la Multiplication même.

Ariste. Pour le faire, je multiplie le nombre des grandes par un nombre qui dise combien de fois une petite est contenuë dans une grande, ou celui-ci par celui-là. * *N.20.* Si un certain nombre de petites quantités en vaut une grande, ce nombre pris autant de fois qu'il y en a de grandes, vaudra toutes les grandes

Faut-il réduire en livres 352 louïs de 24 livres, ou déterminer combien ces 352 louïs contiennent de livres? Je multiplie 352 par 24, ou 24 par 352; & j'ai dans

le produit le nombre des livres qu'il falloit trouver. Puiſque 1 louïs vaut 24 livres, 24 livres priſes 352 fois donneront le nombre des livres contenuës dans 352 louïs.

On réduira de même les livres en ſols ; les ſols en deniers ; &c.

De-là, s'il s'agit de déterminer combien une année de 366 jours contient d'heures, de minutes, de ſecondes, de tierces, on n'a qu'à multiplier d'abord le nombre des jours par 24 heures contenuës dans un jour ; puis le nombre des heures, par 60 minutes contenuës dans une heure ; enſuite, le nombre des minutes par les ſecondes contenuës dans une minute ; enfin, le nombre des ſecondes par 60 tierces contenuës dans une ſeconde.

Eudoxe. Mais, comment vous aſſurez-vous que tant de belles & utiles opérations ſont juſtes ?

Ariste. Par la Diviſion ; ma-

tiére étenduë, & qui demande un Entretien.

IV. ENTRETIEN.

Sur la Division.

29. *Eudoxe.* HE bien, Ariste, qu'elle idée vous êtes vous faite de la Division?

Ariste. C'est une opération qui découvre combien de fois un nombre est contenu dans un nombre, une quantité dans une quantité. Si je cherche combien de fois 2 est contenu dans 8, & que je l'y trouve contenu 4 fois; c'est une Division.

Déterminer combien de fois un nombre contient tel nombre, c'est diviser un nombre par un nombre, le nombre qui contient, par le nombre contenu. Déterminer

combien de fois 8 contient 2; c'eſt diviſer 8 par 2, reduire 8 en parties de 2 unités chacune, ou en 2 parties de 4 unités.

Le nombre qui contient un nombre & que l'on diviſe, eſt *le nombre à diviſer*, ou *le Dividende.* Le nombre contenu & par lequel on diviſe, eſt *le Diviſeur.* Le nombre qui exprime combien de fois le Diviſeur ſe trouve dans le Dividende, eſt le *Quotient.* Si je dis: combien de fois 12 contient-il 4? 3 fois: 12 eſt le Dividende; 4, le Diviſeur; 3, le Quotient.

30. EUDOXE. Cette opération fait naître une réfléxion également utile, ce ſemble, pour la Diviſion & pour la Multiplication. Car, comme 12 diviſé par 4 donne 3, 3 multiplié par 4 donne 12; de-là, le Quotient de la Diviſion exacte multiplié par le Diviſeur, donne pour produit le Dividende, & le produit de la Multiplication divi-

ſé par le Multiplicateur, donne pour Quotient le nombre à multiplier. Donc, ſi le Quotient de la Diviſion, multiplié par le Diviſeur, donne pour produit le Dividende, la Diviſion eſt bonne; & la Multiplication eſt juſte, ſi le produit de la Multiplication diviſé par le Multiplicateur, donne pour Quotient le nombre à multiplier. Par conſéquent, ſi diviſant le produit d'une Multiplication par le Multiplicateur, on trouve que le Quotient exprime le nombre à multiplier, c'eſt une preuve que la Multiplication eſt juſte; & ſi multipliant le Quotient d'une diviſion par le Diviſeur, ou, ce qui eſt la même choſe, le Diviſeur par le Quotient, on a pour produit le Dividende, c'eſt une preuve que la Diviſion eſt bonne.

Ainſi, la Diviſion défait ce qu'a fait la Multiplication; la Multiplication rétablit ce que la Diviſion

a défait ; & ces deux opérations ſe ſervent de preuve l'une à l'autre,

EUDOXE. Mais, par où ſçavez-vous que le produit cherché en preuve de la juſteſſe de la Diviſion eſt contenu dans le Dividende ?

31. *ARISTE.* Par la Souſtraction. J'eſſaye donc d'ôter ce produit du Dividende. Si le produit ne s'y trouve pas tout entier, l'opération eſt vitieuſe ; car le caractere du Quotient étant d'exprimer combien de fois le Diviſeur eſt contenu dans le Dividende, * le produit du Diviſeur par le Quotient doit ſe trouver tout entier dans le Dividende. Si le produit y eſt contenu ſans reſte, ou même, comme il arrive ſouvent, avec un reſte, qui n'égale pas le Diviſeur, l'opération eſt bonne.

*N. 29.

EUDOXE. J'entrevois votre maniére de diviſer,

32. *ARISTE.* La voici : j'écris le

le Dividende ; & vis-à-vis, à droite, je forme de haut en bas un petit demi-cercle coupé par un trait ; & au-deſſus de ce trait, je mets le Diviſeur.

2°. J'examine combien de fois le Diviſeur eſt contenu dans le Dividende ; & je marque le Quotient ſous le trait.

3°. Comme le produit du Quotient multiplié par le Diviſeur, ou du Diviſeur par le Quotient, doit ſe trouver dans le Dividende, puiſque le caractere du Quotient eſt d'exprimer combien de fois le Diviſeur eſt compris dans le Dividende * ; je multiplie le Diviſeur *N.29.
de ma Diviſion par le Quotient, mettant les produits particuliers ſous autant de chiffres du Dividende ; & pour voir ſi le produit eſt contenu dans le Dividende, j'ôte de ce nombre le produit entier. Le produit s'y trouve-t-il ſans reſte ou ſans un reſte capable de

contenir le Diviſeur ? L'opération eſt bonne.

Voulez-vous un exemple de ma méthode dans l'opération la plus ſimple ? Pour diviſer 9 par 3, j'écris d'abord le Dividende 9; puis, le Diviſeur 3 à droite, & vis-à-vis ſur un trait.

9	}	3.
9	}	3.
o.		

Enſuite, je dis : 3 ; combien de fois dans 9 ? 3 fois : je poſe 3 ſous le trait. Voyons par la Multiplication & la Souſtraction ſi 3 eſt le vrai Quotient : 3 fois 3 ſont 9 ; je poſe 9 ſous le Dividende 9 ; & je dis : ôtez 9 de 9 : point de reſte ; je poſe o deſſous ; & voilà l'opération faite, entiere, juſte, démontrée. *.

* *N. 3.*

33. Si le Dividende total eſt compoſé de pluſieurs nombres, dont chacun contienne le Divi-

ſeur ; faiſant de chacun de ces nombres un Dividende partial, j'opére d'abord ſur le premier, allant de la gauche à la droite, puis ſur le ſecond, enſuite ſur le troiſiéme, &c. & je mets à meſure un point deſſous, pour m'avertir que j'opére ſur le nombre ſupérieur, non ſur le ſuivant. J'écris les quotients particuliers de ſuite, à meſure qu'ils ſe préſentent; & comme les Dividendes particuliers, pris enſemble, valent le Dividende total, les Quotients particuliers, pris enſemble, font le Quotient total.

Faut-il diviſer 864 par 2 ?

864	}	2.
864		432.
000.		

Ayant diſpoſé le Dividende & le Diviſeur, je dis : 2 eſt 4 fois dans 8; je poſe 4 au Quotient. Puis,

employant la Multiplication & la Souſtraction, je dis : 4 fois 2 font 8 ; je poſe 8 ſous 8. Otez 8 de 8 : point de reſte ; je poſe o deſſous.

Venons au ſecond Dividende partial : 2 eſt 3 fois dans 6; je poſe 3 ; 3 fois 2 font 6, que je mets ſous 6. Otez 6 de 6 : rien de reſte ; je poſe o.

Opérons enfin ſur le troiſiéme Dividende partial. 2 eſt 2 fois dans 4 ; je poſe 2 ; 2 fois 2 font 4 ; je poſe 4 ſous 4. Otez 4 de 4 : reſte
*N. 30. zero. Donc l'opération eſt juſte *, & le Quotient eſt 432.

34. Eudoxe. Mais, ſi le premier chiffre du Dividende ne contient pas le Diviſeur....

Ariste. Au premier chiffre, je joins le ſecond ou pluſieurs, s'il le faut, pour en faire un Dividende ſuffiſant. Opérons ſur 36 à diviſer par 9.

36⟨9.
36⟩4.
00.

9 n'étant pas contenu dans 3, je dis : combien 9 eſt-il de fois dans 36 ? 4 ; je poſe 4 au Quotient. 4 fois 9 font 36 ; je poſe 36 ſous le Dividende. Otez 6 de 6, 3 de 3 : point d'autre reſte que zero : donc l'opération eſt juſte *, & 9 eſt la quatriéme partie de 36. * N. 30.

EUDOXE. Dès qu'un Dividende partial ou total a un chiffre de plus que le Diviſeur, il le contient; puiſqu'alors dans le premier chiffre du Dividende, l'unité vaut dix fois plus que dans le premier du Diviſeur, étant reculée d'un pas de plus. * * N. 2.

35. Mais ſi le Dividende partial ſe trouve plus grand que le produit du Diviſeur par le Quotient....

ARISTE. J'écris le reſte ou l'ex-

cès sous le Dividende qui le donne, & j'abbaisse le chiffre suivant pour le joindre au reste, & en faire un Dividende qui contienne le Diviseur. Divisons 216 par 6.

```
 216 { 6.
 18  { 36.
 ----
 036
  36
 ---
  00.
```

6 n'est point dans 2 : joignons les 2 premiers chiffres pour en faire le premier Dividende partial 21. Combien de fois 6 est-il dans 21 ? 3 ; je pose 3 au quotient. 3 fois 6 font 18 ; je pose 8 sous 1 & 1 sous 2. Otez 8 de 1, ou plûtôt de 11, supposant une dixaine à tirer de 1 : reste 3, & je retiens 1. 1 & 1 font 2 ; ôtez 2 de 2 : reste 0.

Venons au second Dividende partial. 6 n'est point dans le reste 3. J'abaisse 6, chiffre suivant du

Dividende total ; & le second Dividende est 36. Combien 6 est-il de fois dans 36 ? 6 ; je pose 6 au Quotient. 6 fois 6 font 36, que je pose sous le Dividende. Otez 6 de 6, 3 de 3 : point de reste. Donc 36 est le Quotient de 216 divisé par 6, ou 6 est 36 fois dans 216.

Aussi, multipliez 36 par 6, vous aurez 216.

36. Eudoxe. Mais quand un Dividende partial se trouve immédiatement suivi d'un zero, ou d'un nombre trop petit pour faire un Dividende ....

Ariste. Alors, j'ajoute au Quotient un zero, pour déterminer le rang, & par conséquent la valeur du Quotient partial antérieur. Puis je joins le nombre trop petit avec un nombre suivant, s'il y en a, pour faire un Dividende suffisant. Car, 1 est une fois dans 1 ; 10 fois dans 10 ; 100 fois dans 100 ; 10 0 fois dans 1000, &c. Donc si le

premier Dividende partial dit des centaines d'unités ou des mille, l'unité dans le premier Quotient partial dit une centaine, ou un mille. Par conséquent pour déterminer le rang & la valeur de ce premier Quotient, il faut qu'il soit suivi de deux ou de trois Quotiens particuliers, c'est-à-dire d'autant de Quotiens particuliers, qu'il y a de chiffres qui suivent le
* N. 2. premier Dividende partial. *

Or, le zero, ou un nombre trop petit, ne donne que zero pour Quotient.

S'agit-il de diviser 6018 par 6? Je place à l'ordinaire le Dividende & le Diviseur.

6018	6.
6 18	1003.
0 00.	

Et je dis : 6 est dans 6 une fois ; je pose 1 au Quotient. 1 multiplié par

par 6 donne 6 : ôtez 6 de 6 ; point de reste. Ainsi, 1. est le premier Quotient partial : mais cet 1 vaut dans le fond un mille, puisqu'il dit combien de fois 6 est contenu dans 6, placé au quatrième rang, au rang des mille.

Venons au second chiffre du Dividende. 6 n'est pas dans zero ; je pose zero au Quotient.

6. n'est pas non plus dans 1 ; je pose encore zero.

Enfin, opérant sur les deux derniers nombres, je dis : 6 est 3 fois dans 18 ; je pose 3 au Quotient. 3 fois 6 font 18, que je mets sous 18. ôtez 18 de 18 ; la différence n'est que zero.

Donc le Quotient de 6018 par 6, est 1003. Aussi, le produit de 1003 par 6, est 6018.

37. *EUDOXE*. Donnons deux chiffres au Diviseur.

ARISTE. Dans ce cas, 1°. Il faudra du moins deux chiffres au Di-

vidende pour contenir le Divifeur : car le plus petit des nombres compofés eft 10, & le plus grand des nombres fimples eft 9.

2°. Je vois combien de fois le premier chiffre du Divifeur, allant de la gauche à la droite, eft contenu dans le premier du Dividende; & s'il y eft contenu, j'écris le Quotient fous le premier chiffre du Divifeur.

3°. Je multiplie le Quotient fucceffivement & féparément par chacun des chiffres du Divifeur, allant de la droite à la gauche; & ayant mis dans le même ordre, fous les chiffres du Dividende, les produits particuliers, je les fou-
* N. 32. ftrais * de même.

Suppofons qu'il faut chercher, fuivant cette méthode, le Quotient de 72 divifé par 24.

$$\begin{array}{l} 72 \\ 72 \\ \hline 00. \end{array} \Big\} \begin{array}{l} 24. \\ \hline 3. \end{array}$$

Je dis d'abord : combien 2 est-il de fois dans 7 ? 3 ; je pose 3 au Quotient. 3 fois 4 font 12 ; je pose 2 sous 2, premier chiffre du Dividende, allant de la droite à la gauche, & retiens 1.

3 fois 2 font 6, & 1 que j'ai retenu, font 7 ; je pose 7 sous le second chiffre du Dividende.

Enfin, ôtez 2 de 2 : reste 0 ; 7, de 7 : reste 0.

Et 3 est le Quotient. * *N. 30.

S'il y a plus de deux chiffres au Diviseur, il y en aura plus au Dividende, à proportion ; & la maniere d'opérer sera la même.

38. *Eudoxe.* Souvent le Diviseur entier n'est pas contenu dans un Dividende partial.

Ariste. Alors, j'opére sur le

Dividende total. Faut-il diviſer 198 par 22 ?

```
 198 { 22.
 198 {———
———— { 9.
 000.
```

Ayant mis un point ſous chacun des chiffres du Dividende, pour marquer que j'opére ſur les trois, parce que le Diviſeur entier n'eſt contenu que dans les trois; je dis : 2 n'eſt pas dans 1 ; combien 2 eſt-il de fois dans 19 ? 9 ; je poſe 9 au Quotient.

9 fois 2 font 18 ; je poſe 8 ſous
* N.37. 8, unités ſous unités *, & re-
* N.21. tiens 1. *

9 fois 2 font 18, & 1 retenu font 19 ; je poſe 9 ſous le ſecond rang du Dividende, & 1 que je retiens, ſous le troiſiéme rang.

Otez 8 de 8 : reſte 0 ; 9 de 9 : reſte 0; 1 de 1 : reſte 0.

Et comme il ne reſte rien, 9
* N.30. eſt le Quotient. *

39. *EUDOXE.* Quelquefois quoique le Diviſeur total ſoit contenu dans le Dividende, le premier chiffre du Diviſeur ſe trouve tant de fois dans le premier ou dans les deux premiers du Dividende, que le Quotient qui s'offre, étant multiplié par le Diviſeur, donne un produit plus grand que le Dividende même.

ARISTE. Il eſt vrai: mais quand je m'apperçois que le Quotient qui ſe préſente, donne ou doit donner un produit trop grand, je prens un Quotient plus petit, c'eſt-à-dire le premier des Quotiens inférieurs, qui ne ſe trouve pas trop grand. Si 9 eſt trop grand, je prends 8. 8 eſt-il trop grand? Je prens 7, &c.

Voyons ce qui arrivera dans la Diviſion de 150 par 25.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 25. \\ 150 & \overline{6.} \\ \hline 000. & \end{array}$$

Il faut opérer au même temps sur les trois chiffres du Dividende *, puisque le Diviseur entier n'est contenu que dans les trois. Et je dis : combien 2 est-il de fois dans 15 ? 7. Mais comme je m'apperçois que 7 est un Quotient trop grand, ou que multipliant le Diviseur, il doit donner un produit trop grand ; je prens 6 pour Quotient. Et pour m'assurer que 6 est le vrai Quotient, j'employe à l'ordinaire la Multiplication & la Soustraction. Je dis donc : 6 fois 5 font 30 : je pose 0, & retiens 3. 6 fois 2 font 12, & 3 font 15 ; je pose 5, plus 1.

*N.38.

Otez zero de zero : reste 0 ; 5 de 5 : reste 0; 1 de 1 : reste 0.

*N.30. Donc 6 est le vrai Quotient. *

Eudoxe. L'uſage fait bientôt voir d'un coup d'œil, ſi le Quotient partial qui s'offre, eſt trop grand; ou s'il doit donner un produit trop grand. Si l'on ne voit pas d'abord l'excès d'un Quotient trop grand, la Multiplication du Diviſeur par le Quotient qui ſe préſente, & la Souſtraction du produit, le feront voir. * Et ſi l'on doute, on peut multiplier le Quotient avant que de l'écrire. * *N.24. & 25. *N.30.

40. Vous ne croyez pas apparemment, Ariſte, qu'un Quotient partial, ou le Quotient d'un nombre à diviſer, d'un Dividende particulier, puiſſe exceder 9?

Ariste. Non: car le Dividende partial, a préciſément autant ou plus de chiffres que le Diviſeur *, puiſque, s'il en avoit moins, il ne le contiendroit pas. *N.29.

Or, 1°. Si le Dividende a préciſément autant de chiffres que le

Diviſeur, le Quotient ne peut paſſer 9. Si le Quotient étoit 10, le Diviſeur multiplié par ce Quotient ou par 10, donneroit un produit plus grand que le Dividende: le produit ſeroit le Diviſeur, avec un zero de plus à la fin; puis qu'un
N 26. zero ajouté, multiplie par 10: donc le produit ayant un chiffre de plus que le Dividende, ſeroit
N.34. plus grand.

Que le Dividende ſoit 835, le Diviſeur 342, le Quotient 10: le produit du Diviſeur par le Quotient, ſera 3420, plus grand que le Dividende 835.

2°. Si le Dividende a plus de chiffres que le Diviſeur, c'eſt-à-
N.34. dire un de plus; ou le premier chiffre du Dividende eſt égal au premier du Diviſeur, ou moindre.

Si le premier chiffre du Dividende eſt égal, comme dans la Diviſion de 3058 par 378, les

ſuivans du Dividende, diſent moins que les ſuivans du Diviſeur : autrement le Diviſeur ſeroit contenu dans un égal nombre de chiffres du Dividende, & le dernier, ou l'excès, ſeroit inutile. Donc ſi l'on ajoute au Diviſeur un zero, ou qu'on le multiplie par 10; le produit ſera plus grand que le Dividende : le produit ſera 3780, plus grand que le Dividende 3058.

Si le premier chiffre du Dividende eſt plus petit que le premier du Diviſeur; comme le Diviſeur multiplié par 10 aura un zero, & par conſéquent autant de chiffres que le Dividende, & que le premier du Diviſeur ſera plus grand que le premier du Dividende, ſuivant la ſuppoſition; le produit ſurpaſſera le Dividende. Dans la Diviſion de 2345 par 952, le produit du Diviſeur 952, par le Quotient 10, ſera 9520 *, *N.26.

plus grand que le Dividende 2345.

Donc un Quotient partial ne peut excèder 9.

41. *Eudoxe*. Si le Dividende partial a un chiffre de plus que le Diviſeur total ....

Ariste. Il faut faire un nombre des deux premiers chiffres du Dividende, & diviſer ce nombre par le premier du Diviſeur.

Car, ſi le premier chiffre du Dividende étoit plus grand que le premier du Diviſeur, il ne faudroit que même nombre de chiffres pour contenir le Diviſeur; que trois chiffres pour contenir un Diviſeur de trois chiffres puiſque le premier du Dividende contiendroit plus de centaines, que le premier du Diviſeur : le Dividende 300 contient le Diviſeur 299.

Ainſi dans la ſuppoſition, le premier chiffre du Dividende eſt plus

petit que le premier du Diviseur, ou égal.

Or, 1°. Si le premier chiffre du Dividende est plus petit, il est clair qu'il faut réunir les deux premiers pour y trouver le Diviseur. * *N.34.

2°. Si le 1r. chiffre du Dividende est égal au 1r. chiffre du Diviseur, mais que les suivants du Dividende disent moins que les suivants du Diviseur; alors, le Dividende partial demande un chiffre de plus que le Diviseur, & je fais un nombre des deux 1rs. chiffres du Dividende. Pourquoi? puisque les chiffres qui suivent le 1r. dans le Dividende, disent moins que les chiffres qui suivent le 1r. dans le Diviseur, le second du Diviseur n'est pas contenu dans le second du Dividende; mais bien dans ce second joint à une partie du 1r. Or ce 1r. chiffre du Dividende étant supposé précisément égal au 1r. du Diviseur, se trouvera plus petit que

ce 1r. du Diviſeur, après avoir fourni ce qu'il faudra pour contenir avec le ſecond, le ſecond du Diviſeur. Ainſi ce reſte ne contiendra plus le 1r. chiffre du Diviſeur. Donc, en ce cas le 1r. chiffre du Diviſeur ne doit être compris proprement que dans les deux premiers chiffres du Dividende. On fera donc un nombre des deux premiers du Dividende; & le Dividende partial aura un chiffre de plus que le Diviſeur.

Donc ſi le Dividende partial a un chiffre de plus que le Diviſeur total, il faut faire un nombre des deux 1rs. du Dividende, & diviſer ce nombre par le 1r. du Diviſeur.

42. *EUDOXE*. Et ſi après la diviſion du Dividende total, il ſe trouve quelque reſte....

ARISTE. Ayant écrit ce reſte à part ſur le trait après le Diviſeur, j'écris le Diviſeur même ſous le reſte, que l'on peut réduire en

plus petites parties pour les diviser. Divisons 428 par 52; & voyons s'il ne restera rien.

428	52.	12.
416	8.	52.
012.		

Comme 52 n'est contenu que dans le Dividende total, il faut opérer sur tout le Dividende, & je mets un point sous chacun de ses chiffres. * *N 33.

Je dis donc : combien 5, qui n'est pas dans 4, est-il de fois dans 42? 8. Je pose 8 au Quotient.* *N.34.

8 fois 2 font 16; je pose 6, & retiens 1. 8 fois 5 font 40, & 1 font 41. Je pose 1, puis 4.

Otez 6 de 8: reste 2; 1 de 2: reste 1; 4 de 4: reste 0. * *N.32.

Le reste 12 ne contenant pas le Diviseur 52, se met après le Diviseur, sur le trait; & le Diviseur sous le reste & sous le trait;

c'est-à-dire qu'il reste 12 à diviser par 52.

43. *EUDOXE.* Augmentons le Dividende, ensorte qu'il surpasse de plusieurs chiffres le Diviseur.

ARISTE. Je partagerai donc le Dividende total en plusieurs membres ou Dividendes particuliers, pour opérer sur chacun d'eux successivement.

Divisons 98768 par 254.

98768	254. 216.
762	388. 254.
2256	
2032	
2248	
2032	
216.	

Je fais d'abord un Dividende partial, ou un nombre, non des deux premiers chiffres du Dividende total *, parce qu'ils ne contiennent pas le Diviseur ; mais des

* N.29.

trois premiers, qui suffisent pour le contenir; & je marque un point sous chacun des chiffres du Dividende sur lesquels j'opére.* *N.33.

Puis je dis*: 2 est 4 fois dans *N.37. 9: mais on voit assez que le Diviseur 254 n'est pas 4 fois dans le Dividende 987; 4 fois 254 doivent faire plus de 987, même plus de 1000. Si j'en doutois, pour m'en assurer, avant que d'écrire le Quotient, j'employerois la Multiplication & la Soustraction.* *N.39.

Au lieu de 4, prenons 3 pour Quotient, & multiplions le Diviseur par 3.* *N.32.

3 fois 4 font 12; je pose 2 sous le Dividende partial, & retiens 1.

3 fois 5 font 15, & 1 font 16; je pose 6, & retiens 1.

3 fois 2 font 6, & 1 font 7; je pose 7.

Otez 2 de 7: reste 5; 6 de 8: reste 2; 7 de 9: reste 2.

Le reste du premier nombre est

donc 225 : mais le Diviſeur 254 n'eſt pas contenu dans 225 : j'abaiſſe un chiffre, ſçavoir le 6 du Dividende total, pour le joindre au reſte, & mets un point ſous chacun des chiffres du nouveau Dividende ; & pour faire autant de nombre préciſément dans le ſecond Dividende partial, ou dans le ſecond membre, que dans le Diviſeur, je fais un nombre des
*N.41. deux premiers. *

Et je dis : combien 2 eſt-il de fois dans 22 ? 11 : mais un pareil Quotient multiplié par le Diviſeur, donneroit évidemment un produit plus grand que le membre à diviſer : auſſi le Quotient partial
*N.40. n'excède jamais 9. * 9 même ne ſeroit-il pas trop grand ? .... Oui. Prenons pour ſecond Quotient 8.

8 fois 4 font 32 ; je poſe 2, & retiens 3.

8 fois 5 font 40, & 3 font 43 ; je poſe 3, & retiens 4.

8 fois 2 font 16, & 4 font 20; je pose 0, puis 2.

Otez 2 de 6: reste 4; 3 de 5: reste 2; 0 de 2: reste 2; 2 de 2: reste 0.

Ainsi le second Quotient partial est 8; & le reste, 224.

Comme 224 ne contient pas le Diviseur 254, j'abaisse 8, dernier chiffre du Dividende; & je dis: combien 2 est-il de fois dans 22? 8: car nous venons de voir que 9 seroit un Quotient trop grand: je pose 8 au Quotient.

8 fois 4 font 32; je pose 2, & retiens 3.

8 fois 5 font 40, & 3 font 43; je pose 3, & retiens 4.

8 fois 2 font 16, & 4 font 20; je pose 20.

Otez 2 de 8: reste 6; 3 de 4: reste 1; 0 de 2: reste 2; 2 de 2: reste 0.

Ainsi le troisiéme Quotient partial est 8, & le reste, 216 que j'écris sur le Diviseur 254.

Donc le Quotient total eſt 388, plus 216, à diviſer par 254, & qu'on peut réduire.

44. *EUDOXE.* Mais ſuppoſons un zero à la fin du Dividende total : comment le diviſerez-vous par 10?

ARISTE. J'ôterai le zero, & le reſte ſera le Quotient. Car mettre un zero devant un nombre, c'eſt
N.26. le multiplier par 10.

Or, la Diviſion défait ce qu'à fait la Multiplication; celle-là eſt, pour ainſi dire, l'antipode de celle-
*N.30. ci. * Donc ſi vous ôtez un zero placé à la fin du Dividende, il ſe trouve diviſé par 10, & le reſte eſt le Quotient de la Diviſion.

Faut-il diviſer 80 par 10? Je retranche zero du Dividende 80; &
*N.30. le reſte 8 eſt le Quotient * : car le produit de 10 par 8, eſt 80.

45. *EUDOXE.* Ainſi, de même qu'ajouter au Dividende, deux, trois ou quatre zero, c'eſt le mul-

tiplier par 100, par 1000, ou par 10000, &c. retrancher du Dividende, deux trois ou quatre zero, &c. c'eſt le diviſer par 100, par 1000, ou par 10000, &c.

Mais je ſuppoſe un ou pluſieurs zero à la fin du Dividende & à la fin du Diviſeur.....

Ariste. Dans ce cas, pour abreger, je commence par retrancher de part & d'autre même nombre de zero, mettant un point devant; & le Quotient des reſtes eſt le Quotient total. Car ſi l'on ajoute & au Dividende & au Diviſeur même nombre de zero, le Diviſeur continue d'être contenu de même dans le Dividende; & par conſéquent ſi l'on retranche de part & d'autre même nombre de zero, le Diviſeur continue d'être contenu de même dans le Dividende; ainſi le Quotient eſt le même.

Voulez-vous que je diviſe

466.000 par { 233.000 / 2.
466
000.

Ayant retranché trois zero de part & d'autre, je dis : 2 eſt 2 fois dans 4 ; je poſe 2 au Quotient.

2 fois 3 font 6 ; je poſe 6 au Dividende.

2 fois 3 font 6 ; je poſe 6.

2 fois 2 font 4 ; je poſe 4.

Otez 6 de 6 : reſte 0 ; 6 de 6 : reſte 0 ; 4 de 4 : reſte 0.

Donc 2 eſt le Quotient total. Auſſi, multipliez le Diviſeur total 233000 par 2 : le produit ſera le Dividende total 466000.

46. Eſſayons enfin de réunir dans un exemple la plûpart des regles que nous avons ſuivies.

```
Divisons 28010.00 par {26.00.   8.
         26              {1077. 26.
         ----
         201
         182
         ----
          190
          182
         ----
          008.
```

1°. Je retranche de part & d'autre même nombre de zero, c'est-à-dire deux. *

2°. Les deux premiers chiffres du Dividende, ou 28, contenant le Diviseur 26, j'opére d'abord sur 28, premier membre de la Division *; & je dis: 2 est dans 2 une fois: je pose 1 au Quotient. *N.45. *N.34.

1 fois 6 est 6; je pose 6 au Dividende.

1 fois 2 est 2; je pose 2.

Otez 6 de 8: reste 2; 2 de 2: point de reste.

3°. J'abaisse o pour faire avec

le reste 2, le second membre de la
*N.35. Division * : mais le Diviseur 26
n'est pas contenu dans 20 ; je po-
*N.36. se 0 au Quotient * , & j'abaisse le
chiffre suivant pour avoir 201 ,
qui est un Dividende, ou un mem-
*N.35. bre suffisant. *

Comme ce membre a trois chiffres , & que le Diviseur n'en a que deux , je fais un nombre des deux
*N.41. premiers termes du Dividende * ,
& je dis : combien 2 est-il de fois dans 20 ? 10 fois : mais le Quotient d'un membre ne doit pas ex-
*N.40. ceder 9 * , & 9 seroit ici trop
grand ; 8 même ne le seroit-il pas ?... Oui : j'écris 7 au Quotient.

7 fois 6 font 42 ; je pose 2 au Dividende , & retiens 4.

7 fois 2 font 14 , & 4 font 18 ; je pose 18.

Otez 2 de 1 ou plûtôt de 11 ; reste
*N.12. 9 , & je retiens 1 *. 1 & 8 font 9.
Otez 9 , non de 0 ; mais de 10 : reste 1 ; & je retiens 1. 1 & 1 font

2. Otez 2 de 2 : point de reste.

4°. J'abaisse o pour faire avec le reste 19 un membre suffisant *; *N.35.
& je dis : combien 2 est-il de fois dans 19? 9 : mais 9, 8 même, seroit un Quotient trop grand; nous venons de l'observer : je pose encore 7 au Quotient.

7 fois 6 font 42; je pose 2 au Dividende, & retiens 4.

7 fois 2 font 14, & 4 font 18; je pose 18.

Otez 2 de o, ou plûtôt de 10 : reste 8, & je retiens 1 *. 1 & 8 *N.12.
font 9. Otez 9 de 9; 1 de 1 : point de reste.

Donc le reste total sera 8, & le Quotient $1077 \frac{8}{26}$.

Aussi, multipliez 1077 par 26, & ajoutez 8 au produit : le produit total sera le Dividende 28010.

Si l'on opére sans retrancher le même nombre de zero, le Quotient sera $1077 \frac{800}{2600}$: ce qui revient au

même; puiſque 2600 ſurpaſſe 800, comme 26 excède 8.

47. *EUDOXE.* Mais enfin quand il s'agira de diviſer par des entiers, non-ſeulement des entiers, des livres, des toiſes, des heures: mais encore des ſols & des deniers, ou des pieds & des pouces, &c. ....

ARISTE. Je diviſerai d'abord les entiers, je veux dire les livres, ou les toiſes, ou les heures, dont je marquerai le Quotient; & s'il y y a quelque reſte, je réduirai en ſols les livres qui reſteront; les toiſes, en pieds; les heures, en mi-
*N.28. nutes. * Je joindrai ces ſols aux ſols à diviſer, ou les pieds aux pieds, &c. & je les diviſerai par le même Diviſeur.

Les ſols qui pourront reſter, je les réduirai de même en deniers; les pieds en pouces, &c. pour joindre ces deniers aux deniers à diviſer, ces pouces aux pouces, &c.

&c. & je les diviserai par le même Diviseur.

Eudoxe. Hé bien, divisons 453 liv. 13 s. 6 d. par 9. Partageons 453 liv. 13 s. 6 d. entre 9 personnes.

Ariste. Ayant rangé les chiffres,

453$^{l.}$	13$^{f.}$	6$^{d.}$	9.
45			50. 8. 2.
003.			
	73.		
	72		
	01.		
		18	
		18	
		00.	

1°. Je dis : combien de fois 9 est-il dans 45 ? * 5 ; je pose 5 au Quotient. *N. 34.

5 fois 9 font 45.

Otez 5 de 5 : reste 0 ; 4 de 4 : reste 0.

J'abaisse 3, & comme le reste 003 ne contient pas le Diviseur 9, je pose 0 au Quotient.

2°. Divisons le reste 3, c'est-à-dire 3 livres, en sols. Combien de sols dans une livre? 20. 3 fois 20 font 60. Ces 60 sols avec les 13 du Dividende, font 73, que je mets au Dividende sous le rang des sols à Diviser.

Et je dis: combien 9 est-il de fois dans 73? 8. Je pose 8 au Quotient dans le rang des sols.

8 fois 9 font 72, que je pose sous le Dividende.

Otez 2 de 3: reste 1; 7 de 7: reste 0.

3°. 1 qui reste, est 1 sol. Il faut le réduire en deniers. Or, 1 sol vaut 12 deniers. Joignons ces 12 aux 6 du Dividende. 12 & 6 font 18, que je mets au Dividende sous les deniers.

Et je dis: combien 9 est-il de fois dans 18? 2. Je pose 2 au

Quotient, dans le rang des deniers.

2 fois 9 font 18, que j'écris sous le Dividende.

Otez 18 de 18 : point de reste.

Ainsi le Quotient de 453 liv. 13 sols, 6 den. divisés par 9, est 50 liv. 8 sols, 2 den. & chacun aura ses 50 liv. 8 sols 2 den.

En général, comme le Quotient, suivant cette méthode, exprime séparément & successivement combien le Diviseur est contenu de fois dans chaque espèce; dans les livres, dans les sols, dans les deniers; & que ces différentes espèces prises ensemble, font le Dividende; l'opération est juste, & le Quotient est le vrai Quotient.

48. EUDOXE. Mais quand il s'agit de diviser des quantités complexes, ou de différentes espèces, par des quantités complexes....

ARISTE. 1°. Je réduis les quantités du Dividende & celles du Diviſeur à leurs moindres eſpèces.

2°. Les quantités réduites du Dividende, je les diviſe par celles du Diviſeur; & j'ai au Quotient la valeur de la moindre eſpèce.

Faut-il diviſer $2^{liv.}\ 2^{f.}\ 6^{d.}$
par $2^{toi.}\ 2^{pi.}\ 2^{po}$?

1°. Je réduis 2 livres 2 ſols 6 deniers, en deniers; & j'ai 510
* N. 28. deniers. * Je réduis de même 2 toiſes 2 pieds 2 pouces, en pouces; & j'ai 170 pouces.



2°. Je diviſe 510 deniers par 170 pouces; & j'ai 3 deniers pour chaque pouce.

49. *EUDOXE*. Apparemment vous ramenez par la Diviſion, les petites eſpèces à de plus grandes.

ARISTE. Je diviſe la ſomme des petites par le nombre qui dit, combien de fois la grande con-

tient la petite. Pour réduire la somme de den. en sols; comme le sol contient 12 deniers, je divise la somme des deniers par 12, & le Quotient est la somme des sols; puisqu'il dit combien de fois la valeur d'un sol est contenue dans la somme des deniers.

On réduira de même les tierces en secondes; les secondes en minutes; &c.

50. *EUDOXE*. Après cela, nous pouvons, à la faveur de la Division, multiplier des grandeurs complexes, ou de différentes espèces, par des grandeurs complexes.

ARISTE. 1°. Je réduis les quantités à multiplier, à leurs plus petites espèces; je réduis de même les quantités du Multiplicateur. * *N. 28.

2°. Je multiplie les quantités réduites.

3°. Je divise le produit par le nombre des moindres parties du

Multiplicateur contenues dans une des plus grandes.

4°. Je réduis par la Diviſion le
N.49. quotient en eſpèces plus grandes. Faut-il trouver la valeur de 4 toiſes, 5 pieds, 6 pouces de maçonnerie, à 20 liv. 5 ſ. 6 d. la toiſe? Cette valeur ſera le produit de 20 liv. 5 ſ. 6 d. par 4 toiſes, 5 pieds, 6 pouces.

Je réduis donc d'abord par la Multiplication 20 liv. 5 ſ. 6 d. en deniers, .. & j'ai 4866 d. pour chaque toiſe. Je réduis de même 4 toiſes, 5 pieds, 6 pouces, en pouces, ... & j'ai 364 pouces.

Enſuite je multiplie 4866 d. par 354 pou.... & j'ai 1722564 d. qui feroient la valeur de 354 pouces, ſi chaque pouce valoit 4866 d. mais chaque pouce n'étant que la ſoixante-douzieme partie d'une toiſe qui contient 72 pouces, les 354 pouces valent 72 fois moins. Ainſi, réduiſant 1722564 en 72

parties, ou divisant ce produit par 72, j'aurai dans le Quotient la valeur des 354 pouces.

Cherchons le Quotient de 1722564 par 72... C'est 23924 d. $\frac{36}{72}$, ou $\frac{1}{2}$, valeur des 354 pouces.

Réduisons les 23924 d. en sols, divisant par 12*, & négligeant le reste;.. nous avons 1993 sols 8 den. *N.49.

Enfin réduisons les sols en livres, divisant par 20,.. nous avons 99 liv 13 sols 8 den. valeur de 4 toises, 5 pieds, 6 pouces, à 20 liv. 5 s. 6 d. la toise.

Eudoxe. Avec ces lumières, Ariste, il est aisé de voir clair dans une sorte de calcul plus général, qui paroît obscur & mystérieux d'abord, mais qui devient aussitôt une source de lumières, & sert même à répandre le jour dans le calcul numérique.

Ariste. C'est l'Algèbre, calcul à la mode, & qui est tout-à-

fait de mon goût ; parce qu'il conduit l'eſprit par des voyes abrégées, applanies & ſûres, juſques aux vérités les plus reculées & les plus ſublimes. Que je ſerois aiſe, Eudoxe, que nous euſſions quelques entretiens ſur cette matière, pour voir ſi les idées que je me ſuis faites récemment là-deſſus, ſont juſtes, préciſes, nettes, ſuivies !

EUDOXE. Les vôtres réveilleront les miennes, & ce ſera quand il vous plaira. Mais je crains que ce nouveau genre d'Entretiens ne ſoit bien ſec, & ne gêne un peu l'imagination.

ARISTE. La plume ou le crayon à la main, nous tracerons des caractères qui ſoutiendront l'imagination ; & nous eſſayerons d'aſſaiſonner nos Entretiens de Problêmes curieux.



ENTRETIENS MATHÉMATIQUES SUR LE CALCUL LITTERAL.

I. ENTRETIEN.

Sur l'Addition & la Soustraction Algèbrique.

Eudoxe. E bien, Ariste, Nous allons donc parler un langage qui sent un peu l'Arabe : car on dit que l'Algèbre vient des Arabes.

Ariste. C'est un langage qui peut allarmer d'abord : mais on

s'y fait ; & si l'on n'y trouve pas ce nombre & cette harmonie d'expressions qui flattent l'oreille, on est bien dédommagé par la foule & la certitude des vérités qu'il révèle, dans un ordre, où ce qui précède, répand sans cesse la lumière sur ce qui suit.

EUDOXE. Aussi verrai-je aujourd'hui volontiers, & vos idées, & l'ordre de vos idées, sur les premières opérations de l'Algèbre. Supposons qu'il s'agit de m'instruire ; & trouvant plus de plaisir à vous écouter qu'à parler, je parlerai peu.

ARISTE. Et moi, je ne dirai précisément, que ce qui me paroîtra nécessaire, pour éclairer un esprit qui a la constance d'aller pas à pas, & d'avancer par dégrés. C'est le moyen, je crois, de faire plus de chemin.

1. L'Algèbre est un calcul par lettres, qui indique les opéra-

tions du calcul numérique.

2. J'appelle *Grandeur* ou *Quantité* ce qui peut toujours croître ou diminuer. Et comme les plus ſimples expreſſions cauſent d'ordinaire le moins d'embarras dans l'eſprit, les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. ſeront employées pour exprimer chacune ſa grandeur ou ſa quantité. Auſſi, les lettres ſont des quantités algèbriques ou littérales.

3. Ces quantités ont leurs ſignes; + ſignifie *plus*; —, *moins*; =, *égal*; >, *plus grand*; <, *plus petit*; ∞, *infini*.

4. Quantités *poſitives* & quantités *négatives*, ſont quantités réelles, mais oppoſées; qui ſe détruiſent les unes les autres, ſoit par Addition, ſoit par Souſtraction. Un louïs qu'on poſſede, eſt une quantité poſitive; un louïs qu'on doit, & qui détruit en quelque ſorte celui qu'on poſſede, eſt une quantité négative.

Tel qui a quelque chose & le doit, n'a rien ; mais un homme qui n'ayant rien doit un louïs, a moins que rien ; tandis qu'un homme qui a un louïs sans rien devoir, a plus que rien ; & par conséquent le rien ou le zero tient un milieu entre la grandeur positive & la grandeur négative ; au-dessous de celle-là, au-dessus de celle-ci.

Les quantités qui ont + avant elles, sont positives, comme $+a$; celles qui ont —, sont négatives, comme $-a$. Une quantité sans signe est censée avoir le signe + ; & elle est positive, comme a. Ces deux signes + & — se détruisent, ainsi, $a-a=0$; $+2-2=0$.

5. Les quantités *simples*, *incomplexes*, ou *monomes*, sont celles qui ne sont point liées à d'autres quantités par les signes + ou —, comme a, ab ; les *complexes* ou *polinomes* ont leurs parties liées

par ces ſignes, comme $a + b$; $ab - bc$.

6. *Termes*, ſont les parties d'une quantité complexe, diſtinguées par les ſignes + ou —; *a* & *b* ſont termes de $a + b$. La quantité a-t-elle deux termes? C'eſt un *Binome*; 3? un *Trinome*, &c.

7. Les termes formés des mêmes lettres ſont *ſemblables*; comme *abc*, & *abc*; la quantité $ab + ab - bc$ a deux termes ſemblables.

8. Si les termes ſemblables ont le même ſigne, on les réduit à une plus ſimple expreſſion, en mettant avant un de ces termes, un chiffre qui en exprime le nombre, & qui ſoit précédé de leur ſigne. Ainſi, $ab - ac + ab - ac$, devient $2ab - 2ac$; & le chiffre mis avant un terme ſe nomme *Coefficient*. Chaque terme a ſon Coefficient; c'eſt l'unité quand on ne l'exprime point. Si les ſignes des ter-

mes semblables sont différents, on ôte le plus petit coefficient du plus grand, donnant au reste le signe du plus grand, & $4ab - 3ab$ devient $1ab = ab$: car $-3ab$ détruit
* N. 4. $+3ab$; $-3ab + 3ab = 0$.*

9. On écrit les lettres dans leur rang ; par exemple, *abc* au lieu de *acb*.

10. Enfin j'appelle simplement *Proposition*, celle qui exprime précisément une vérité à démontrer ; *Problême*, celle qui dit quelque chose à faire & à démontrer.

EUDOXE. Je vois bien que vous allez résoudre, du moins, les Problêmes de l'Addition & de la Soustraction.

ARISTE. PROBLÊME I.

11. *Additionner des quantités algèbriques.*

Si les quantités sont toutes dissemblables, je les écris de suite avec leurs signes.

Pour ajouter $a+b=2+4$ avec $c+d=6+8$, j'écris $a+b+c+d=2+4+6+8=20$; & l'opération eſt faite ; puiſque $a+b+c+d$, eſt la ſomme de $a+b$ ajoutée avec $c+d$.

Si les quantités ſont ſemblables, ou mêlées de termes ſemblables, je les écris avec leurs ſignes, les unes ſous les autres, & réduis les termes ſemblables. * *N. 8.*

Pour ajouter $4ab+5bc+2cd$ avec $2ab-2bc-3cd$,

j'écris $\left.\begin{array}{l}4ab+5bc+2cd\\+2ab-2bc-3cd\end{array}\right\}=6ab+3bc-cd.$

car $4ab+2ab=6ab$; $+5bc-2bc=3bc$; $+2cd-3cd=-1cd=-cd$.

Pour ajouter $2a-2b$ avec $3a-2b$, j'écris

$\left.\begin{array}{l}2a-2b\\+3a-2b\end{array}\right\}=\ldots 5a-4b.$

PROBLÊME II.

12. ***Souſtraire des quantités algébriques.***

La différence de deux quantités, de deux grandeurs, eſt le plus ou le moins. Auſſi 2 eſt la différence de 5 & de 3 : or, $5 - 3 = 2$: donc $5 - 3$ eſt la différence de 5 & de 3. De-là, une quantité moins une autre, $a - b$ eſt leur différence ; & comme $+$ eſt ſigne d'Addition, $-$ eſt ſigne de Souſtraction.

Cela poſé ; j'écris la quantité à ſouſtraire, après,ou bien ſous celle dont il faut l'ôter, en changeant ſes ſignes, $+$ en $-$, $-$ en $+$; enſuite je réduis les termes ſemblables, s'il y en a ; & la ſomme des deux quantités eſt la différence, ou le reſte (*a*) ; puiſqu'une quantité moins une autre eſt leur différence.

Pour ſouſtraire $c + d = 2 + 4$, de $a + b = 6 + 8$, j'écris

$$\begin{array}{l} a+b \\ -c-d \end{array} = \begin{array}{l} 6+8 \\ -2-4 \end{array} = 8 \text{ ; \& l'o-}$$

(*a*) Calcul numérique, N. 8.

pération

pération eſt faite : car $a+b-c-d$, eſt la différence ou le reſte. De $6+8$, ôtez $2+4$: reſte $6+8-2-4=8$.

EUDOXE. Et pour ſouſtraire $c-d$ de $a+b$?

ARISTE. J'écris $a+b$
$-c+d$; parce qu'en ôtant $+c$, j'ai retranché trop de la valeur de d, que je rétablis par le ſigne $+$, ſigne d'une quantité poſitive *, ou d'Addition. * N. 4.

Pour ſouſtraire $4ab-3bc+3cd$, de $6ab-5bc+3cd$, j'écris...

$$\left.\begin{array}{l}6ab-5bc+3cd\\-4ab+3bc-3cd\end{array}\right\}=2ab-2bc:$$

car $6ab-4ab=2ab$; $-5bc+3bc=-2bc$; $3cd-3cd=0$. * * N. 4.

13. *EUDOXE.* Mais pour ſouſtraire $-b$ de $+a$?

ARISTE. J'écris $a+b$; parce que ſouſtraire $-b$ de $+a$, c'eſt ſouſtraire la Souſtraction de b *, *N. 12. c'eſt rétablir b, c'eſt l'ajouter. Souſtraire -2 de 4, c'eſt ajouter 2 à

4, & la différence est 6.

Voilà les quantités littérales soustraites. Quand les multiplierons-nous ?

EUDOXE. Quand nous aurons pris l'air dans mon jardin, & qu'en considérant les fleurs que le Printemps y a fait éclore, nous aurons mêlé à nos idées abstraites, quelques idées un peu plus gayes, de Violettes, d'Anémônes, de Jonquilles.

II. ENTRETIEN.

Sur la Multiplication des quantités Algèbriques.

EUDOXE. JE suis disposé parfaitement, Ariste, à vous voir multiplier vos grandeurs littérales.

14. *ARISTE.* Les opérations algèbriques n'étant que des opé-

rations numériques indiquées *, *N 1. la maniére de les faire est arbitraire. Or on est convenu que la jonction des quantités par une espéce de croix de S. André (×), ou sans signe intermédiaire, en feroit la Multiplication; & que les quantités jointes de la sorte, feroient les produits. Ainsi, $a \times b$, ou ab, est le produit de a par b; c'est-à-dire a pris autant de fois qu'il est marqué par b. Si $a = 4$, & $b = 3$, $a \times b = 4 \times 3 = 12$ (a); $\overline{a+b} \times \overline{c+d}$ est $a+b$ multiplié par $c+d$. Les quantités qui donnent le produit, en sont les *Racines*.

Enfin toute grandeur a, peut être regardée comme le produit de a par 1 *; puisque prise une *N.19. fois, elle est la même.

Cela supposé; un détail de quelques Problêmes suivis, & naissants les uns des autres, vont développer ma pensée.

(a) Calcul numérique, N. 19.

PROBLÉME I.

15. *Multiplier des grandeurs simples positives.*

Je les joins par une croix de S. André, ou sans signe intermédiaire qui les lie.

Pour multiplier ab par cd, j'écris $ab \times cd$, ou $abcd$. *

* N. 14.

Il est clair qu'une grandeur qui a le signe +, multipliée par une qui a le signe +, donne un produit qui a le signe +; puisque ce produit est une grandeur positive*, prise autant de fois qu'il est marqué par une grandeur positive. *

* N. 4.

* N. 14.

De-là cette premiere régle :

+	+	+
plus par	*plus,*	*donne plus.*

PROBLÉME II.

16. *Multiplier une grandeur simple positive par une négative.*

Je mets le signe — avant le produit.

Pour multiplier a par $-b$, j'écris $-ab$: car multiplier 2 par -1, c'est prendre 2 moins une fois (a); c'est le souſtraire, le retrancher, ou lui donner le ſigne $-$. Multiplier -2 par $+1$, c'eſt prendre -2 une fois, ou donner à 2 le ſigne $-$.* Ainſi, 2×-1, ou $-2\times+1$ $=-2$. * N.12.

De même, multiplier a par $-b$, c'eſt prendre a moins le nombre de fois que dit b, ou ſouſtraire a autant de fois qu'il eſt marqué par b; & multiplier $-a$ par b, c'eſt prendre $-a$ autant de fois qu'il eſt marqué par b. Ainſi, $a\times-b$ $=-ab$, & $-a\times+b=-ab$.

De-là cette ſeconde régle :

$+$ $-$ $-$ $+$
plus par moins, ou moins par plus,
$-$
donne moins.

(a) Calcul numérique, N. 19.

PROBLÉME III.

17. *Multiplier une quantité simple négative, par une autre négative.*

Je mets le signe + avant le produit.

Pour multiplier $-a$ par $-b$, j'écris $+ab$: car multiplier -2 par -1, c'est prendre -2 moins une fois, c'est soustraire -2, ou *N.13. ajouter & rétablir 2 *, ce qui se fait par le signe +.

De-là cette troisiéme regle:

$-$ $-$ $+$

moins par moins, donne plus.

18. EUDOXE. C'est-à-dire qu'en général, pour multiplier une quantité simple ou incomplexe par une autre, vous joignez les deux; les liant par le signe ordinaire de la Multiplication, ou sans les lier; vous écrivez avant le produit le signe +, si les deux grandeurs ont le signe +, ou le signe −; & vous écrivez le signe − si l'une

des deux précisément a ce signe : & vos régles sont justes sans doute.

L'exaltation ou la formation des puissances simples ne vient-elle pas s'offrir ici ?

19. ARISTE. $a \times b = ab$ est un plan (*a*) ou un rectangle algebrique, $ab \times c = abc$, un solide ; $a \times a = aa$, un quarré ; $aa \times a = aaa$, un cube (*b*) Si $a = 2$, $aa = 2 \times 2 = 4$; & $aaa = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

20. Toute grandeur linéaire ou d'une dimension, d'une lettre, *a*, ou *b*, pouvant croitre ou diminuer *, est formée d'une autre sur laquelle elle est immédiatement élevée en quelque sorte comme sur sa racine ; & cette élevation se nomme premier dégré, ou premiere puissance. Ainsi *a* est élevée à la premiere puissance ; *a* est la premiere puissance, ou la puissan- * *N.* 21

(*a*) Calcul numérique, N. 25.
(*b*) Calcul numérique, N. 24, 25.

ce linéaire de *a*; *aa*, quarré de *a*; en est la seconde puissance; *aaa*, la troisiéme; *aaaa*, la quatriéme, &c. & par conséquent à mesure qu'on joint la même grandeur à elle-même sans signe, elle croît en puissance.

21. Au lieu de *a*, de *aa*, de *aaa*, &c. on peut écrire, & l'on écrit a^1, a^2, a^3, &c. & a^1, a^2, a^3, &c. sont la premiere puissance d'*a*, la seconde, la troisiéme; & les nombres 1, 2, 3, &c. mis après une grandeur, un peu plus haut, sont les exposans des puissances qu'ils expriment.

a^n sera la grandeur *a* élevée à une puissance quelconque, représentée par l'indéterminée *n*, qu'on détermine substituant un nombre à sa place.

22. Il y a des premieres puissances de plusieurs dimensions différentes, & qui sont faites du produit de plusieurs puissances premieres

mieres d'une dimension, comme $a^1b^1 = ab = a \times b$. Ces premieres puissances sont des grandeurs linéaires, des racines. $\overline{ab}^2$, $\overline{abc}^2$, $\overline{a+b}^2$ disent des grandeurs toutes élevées à la seconde puissance.

23. Les puissances plus élevées peuvent être regardées comme le produit d'autres puissances; ainsi $a^4 = a^2 \times a^2$. $\overline{ab}^4 = a^4 \times b^4 = a^2b^2 \times a^2b^2 = \overline{ab}^2 \times \overline{ab}^2$.

De-là, multiplier un rectangle ou un plan ab par lui-même, c'est multiplier chaque lettre par elle-même; $ab \times ab = a^2b^2$: ainsi le produit d'un quarré par un quarré est un quarré, puisque $a^2b^2 = ab \times ab$.

24. *EUDOXE.* Comment multipliez-vous les puissances des mêmes lettres, par exemple, a^3 par a^2?

ARISTE. En ajoutant leurs ex-

posans : car $a^{3+2} = a^5 = aaaaa = aaa \times aa = a^3 \times a^2$. *
*N. 14 & 21. Ainsi $a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7$. $a^3 b^3 \times a^4 b^5 = a^{3+4} b^{3+5} = a^7 b^8$. En général, le produit de x^m par x^n est x^{m+n}.

25. *EUDOXE*. Mais si les lettres ne sont pas semblables, comme a^3 & b^2?...

ARISTE. Je les joins avec leurs exposans. Il est clair que $a^3 \times b^2$ n'égale pas $a^{3+2} = a^5$: mais $a^3 \times b^2 = a^3 b^2$. *
*N. 14.

26. *EUDOXE*. Et s'il faut, élever une grandeur incomplexe à une puissance quelconque ou donnée, par exemple à la troisiéme....

ARISTE. Je multiplie la quantité par elle-même autant de fois, moins une, que l'exposant de la puissance donnée contient d'unités. $a \times a = a^2$, seconde puissan-

ce : $a \times a \times a = a^3$, troisiéme puissance, &c.* *N. 21.

Pour élever une grandeur à la quatriéme puissance, on peut l'élever d'abord à la seconde ; puis élever la seconde, regardée comme racine, à la seconde ; $a \times a = a^2$, & $a^2 \times a^2 = a^4$. $2 \times 2 = 4$, & $4 \times 4 = 16$.

EUDOXE. On peut encore, ce me semble, multiplier l'exposant de la quantité qu'il faut élever, par l'exposant de la puissance donnée ; & le produit sera l'exposant de la grandeur exaltée, ou de la puissance nouvelle.

Pour élever a^1 à la troisiéme puissance a^3, multipliez 1 par 3, & vous avez a^3 : car $a^{1 \times 3} = a^3$ (a).

ARISTE. Et cette voye est plus courte. Aussi pour élever a^2 à sa quatriéme puissance, j'écris $a^{2 \times 4} = a^8$; la quatriéme puissance de

(a) Calcul numérique, N. 13.

*N. 22. $ab = a^1b^1$ *, fera $a^{1\times4}b^{1\times4} = a^4b^4$; la quatriéme puiſſance de $-a^1$ ſera $+a^{1\times4} = +a^4$.

En général la puiſſance n de $\pm a^m$ ſera $\pm a^{mn}$.

Et la ſuite de mes idées m'avertit ici de multiplier des quantités complexes.

EUDOXE. J'aime à vous voir avancer avec ordre, allant de Problêmes en Problêmes qui dévelopent vos penſées en ſe dévelopant les uns les autres.

ARISTE. PROBLÉME IV.

27. *Multiplier une quantité complexe par une ſimple.*

Allant de la gauche à la droite, je multiplie chaque terme de celle-là par celle-ci, & donne aux produits particuliers leurs ſignes propres *. Le tout & ſes parties, *N. 18. priſes enſemble, étant même choſe, en multipliant les parties ſuc-

ceſſivement, on a dans la ſomme des produits particuliers le produit total, que j'écris ſous le Multiplicateur écrit lui même ſous la quantité multipliée.

Faut-il multiplier $a+b$
par c?
j'écris $ac+bc$ *. *N. 15.

Pour multiplier $a+b$
par $-c$,
j'écris $-ac-bc$ *. *N. 15.

Pour multiplier $a-b$
par c,
j'écris $ac-bc$ *. *N. 16.

Le produit ac dit trop de la valeur de bc, que j'ôte en écrivant $-bc$.

Pour multiplier $a-b$
par $-c$,
j'écris $-ac+bc$ *. *N. 17.

En multipliant a par $-c$, j'ai mul-

tiplié trop de la valeur de b. Il faut donc souſtraire $-b \times -c = + bc$, ou rétablir bc par le ſigne $+$*.

*N. 13.

PROBLÉME V.

28. *Multiplier une grandeur complexe par une autre.*

Je multiplie ſucceſſivement tous les termes de celle-là par chaque terme de celle-ci, reculant d'un rang les produits particuliers à meſure que je multiplie par un nouveau terme; & les produits particuliers, pris enſemble, font le produit total*.

*N. 27.

Pour multiplier $a + b$
par $c + d$,
j'écris $ac + bc$
$ad + bd$.

Pour multiplier $a - b$
par $c - d$,
j'écris $ac - bc$
$- ad + bd$*.

*N. 18.

PROBLÉME VI.

29. *Multiplier des quantités complexes semblables.*

Je multiplie les termes par les termes, & réduis les produits*. * N. 8.

Pour multiplier $a+a$

par $b+b$,

j'écris $ab+ab$

$ab+ab$

& j'ai par réduction $4ab$.

PROBLÉME VII.

30. *Multiplier des quantités qui ont des coëfficiens.*

Je multiplie les coëfficiens par les coëfficiens, & les quantités par les quantités ou les lettres par les lettres; & fais les produits de ceux-là coëfficiens des produits de celles-ci.

Pour multiplier $2a$

par $2b$,

j'écris $4ab$.

Les coëfficiens étant les expressions d'un certain nombre de quantités semblables, mais réduites, le produit des coëfficiens exprime le produit des quantités. Au produit des coëfficiens on joint le produit d'une lettre par une lettre pour déterminer la signification du produit des coëfficiens.

Aussi, $3a \times 2b = a + a + a \times b + b = ab + ab + ab + ab + ab + ab = 6ab$ *.

*N. 28.

PROBLÉME VIII.

31. *Multiplier deux quantités complexes quelconques.*

Je multiplie tous les termes de l'une par chaque terme de l'autre; & réduis les produits *.

*N. 27, 28, 29 & 30.

Pour multiplier $2a + 3b - c$
par $2a - 3b$,

j'écris $4a^2 + 6ab - 2ac$
$- 6ab - 9b^2 + 3bc$ *

La réduct. donnera $4a^2 - 2ac - 9b^2 + 3bc$ *.

*N. 16 & 17.

*N. 30, 8, 4 & 18.

S'il falloit détailler l'opération, je dirois :

$2a \times 2a = 4a^2$; $3b \times 2a = 6ab$ *; — *N. 30.
$c \times 2a = -2ac$*. *N. 16.
$2a \times -3b = -6ab$; $3b \times -3b = -9b^2$;
$-c \times -3b = +3bc$*. *N. 17.

Mais $+6ab - 6ab = 0$ *: donc le produit est $4a^2 - 2ac - 9b^2 + 3bc$. * N. 4.

32. Enfin si chacun des termes du produit a même nombre de dimensions ou de lettres, ces termes sont *quantités homogènes* ; & pour rendre deux quantités *abc*, *dd* homogènes, on peut en multiplier une *dd* par 1. *abc* & $1 \times dd$, seront homogènes.

33. EUDOXE. Mais s'il faut ordonner un produit....

ARISTE. J'examine dans les termes du produit quelle lettre se trouve le plus souvent avec quelqu'autre dimension. Le terme où cette lettre est plus élevée, je le mets le premier ; puis, le terme

où elle eſt moins élevée d'un dégré, ainſi de ſuite ; & c'eſt ordonner un produit par rapport à une lettre, qui eſt comme la lettre dominante ; mais qui peut n'être pas la premiere. Les produits particuliers des premieres racines ſeront les premiers ſelon l'ordre des racines.

Si une grandeur eſt préciſément le produit de quelques racines multipliées par elles-mêmes, c'eſt une puiſſance parfaite ; ſinon, c'eſt une puiſſance imparfaite, qui contient une puiſſance parfaite ; mais avec un reſte, comme 26, qui comprend 25, puiſſance parfaite, plus 1.

Et nous touchons enfin à l'exaltation des puiſſances des quantités complexes.

34. EUDOXE. Il s'agit donc d'élever une quantité complexe à une puiſſance donnée.

ARISTE. Je multiplie la quanti-

té par elle-même autant de fois, moins une, que l'expoſant de la puiſſance contient l'unité *, & j'ordonne le produit réduit *. *N. 28. *N. 31.

Pour élever $a+b$ à la ſeconde puiſſance, je multiplie une fois $a+b$ par $a+b$, c'eſt-à-dire par a, puis par b; & le produit réduit & ordonné $a^2+2ab+b^2$, eſt la ſeconde puiſſance.

Faut-il élever $a+b$ à la troiſiéme puiſſance? Je multiplie la ſeconde puiſſance $a^2+2ab+b^2$ par la premiere $a+b$; & le produit $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ eſt la troiſiéme puiſſance. On trouvera les autres de même.

35. Ainſi le quarré d'un Binome $a+b$ contient, 1°. Le quarré a^2 du premier terme a. 2°. Deux fois le plan du premier par le ſecond, ou $2ab$, qui eſt le double de a par b. 3°. Le quarré b^2 du ſecond.

36. Le cube d'un Binome con-

tient, 1°. Le cube a^3 du premier terme. 2°. Trois produits $3a^2b$ du quarré du premier terme a par le ſecond b, ou le triple du quarré du premier par le ſecond. 3°. Trois produits $3ab^2$ du premier terme par le quarré du ſecond, ou le triple du premier par le quarré ſecond. 4°. Le cube b^3 du ſecond, &c.

37. De-là 1°. La Table des puiſſances d'un Binome $a+b$,

$a^1 + b^1$, premiere puiſſance.
$a^2 + 2ab + b^2$, 2e. puiſſance.
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, 3e puiſſance.
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, quatriéme puiſſance, &c.

38. 2°. Chaque puiſſance, comme on peut le voir dans la Table, comprend autant de termes, un de plus, que l'expoſant de la puiſſance contient de fois l'unité.

39. 3°. Chaque puiſſance litterale d'une quantité complexe, tel-

le qu'eſt $a^2+2ab+b^2$, ſeconde puiſſance de $a+b$, eſt une formule, ou une expreſſion générale qui repréſente la maniere d'élever à la même puiſſance toutes ſortes de quantités de même nombre de termes.

Faut-il élever 25 à la ſeconde puiſſance? Soit $25=a+b$.

Je dis d'abord en ſuivant la formule $a^2+2ab+b^2$, le quarré a^2 de 2 eſt 4; & comme 2 ſignifie ici deux dixaines, ou 20; le quarré 4 vaut quatre cens (*a*): j'écris donc 4, le ſuppoſant au rang des centaines.

Puis je dis: le plan ab de $2=20$ par 5 eſt 100: donc le double $2ab$ de ce plan ab eſt 200; j'écris 200 mettant 2 ſous 4 qui exprime des centaines.

Enſuite je dis: le quarré b^2 de 5 eſt 25; j'écris 2 ſous le pénultiéme zero, au rang des dixaines (*b*),

(*a*) Cal. num. N. 2, 21. (*b*) Ibid. N. 2.

& 5 ſous le dernier zero, au rang des unités.

Enfin, j'additionne ces produits (*a*); & le produit total, ou la ſeconde puiſſance de 25 eſt 625; auſſi $25 \times 25 = 625$.

L'on a donc la ſeconde puiſſance d'unn ombre en opérant de la gauche à la droite, ou de la droite à la gauche (*b*).

40. 4°. Par le même principe, on trouve que ſi la quantité complexe a plus de deux termes, la ſeconde puiſſance contient, 1°. Le quarré du premier terme, plus deux fois le produit du premier terme par le ſecond, plus le quarré du ſecond. 2°. Deux fois le produit de la ſomme des deux premiers par le troiſiéme, plus le quarré du troiſiéme. 3°. Deux fois la ſomme des trois premiers par le quatriéme, plus le quarré

(*a*) Calcul numérique, N. 21.
(*b*) Ibid. N. 21.

du quatriéme, ainſi de ſuite.

Cherchons le cube d'un Trinome litteral $a+b+c$*. *N.34.

Je trouve $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$.

Or, $3a^2c+6abc+3b^2c$ eſt le produit du triple du quarré des deux premieres racines $a+b$ par la troiſiéme c, puiſque ce quarré eſt $a^2+2ab+b^2$ *, & que le triple, ou $\overline{3a^2+6ab+3b^2}\times c=3a^2c+6abc+3b^2c$*. *N.32. *N.27.

D'ailleurs $3ac^2+3bc^2=\overline{3a+3b}\times c^2$, ou le triple du produit de la ſomme des deux premieres racines a, b, par le quarré de la 3e c.

41. Sur ce principe, ſi le Polinome ou la quantité complexe a plus de deux termes, la troiſiéme puiſſance comprend 1°. Le cube du premier terme ou de la premiere racine, plus trois produits du quarré du premier terme par le

second, plus trois produits du premier terme par le quarré du second; plus le cube du second. 2°. Trois produits du quarré de la somme des deux premiers termes par le 3e, plus trois produits de la somme des deux premiers par le quarré du 3e. plus le cube du 3e. 3°. Trois produits du quarré de la somme des trois premiers termes par le 4e, plus trois produits de la somme des trois premiers termes par le quarré du quatriéme, plus le cube du quatriéme, &c.

Il est clair que trois produits d'une grandeur, ou le triple du produit d'une grandeur, c'est même chose.

42. *EUDOXE*. Cela supposé, vous allez me résoudre aisément deux Problêmes.

PROBLÉME I.

Elever un Polinome quelconque à la seconde puissance.

ARISTE. Est-ce un Binome? j'écris

j'écris 1°. Le quarré du premier terme. 2°. Le double du produit du premier par le second. 3°. Le quarré du second *. *N.35.

Est-ce un Trinome ? j'écris de plus le double du produit de la somme des deux premiers termes par le troisiéme, plus le quarré du troisiéme.

Est-ce un Quadrinome ? j'ajoute le double du produit de la somme des trois premiers termes par le quatriéme, plus le quarré du quatriéme, ainsi de suite *. *N.34.

EUDOXE. PROBLÉME II.

43. *Elever un Polinome quelconque à la troisiéme puissance.*

ARISTE. J'écris 1°. Le cube du premier terme. 2°. Le triple du produit du quarré du premier par le second. 3°. Le triple du produit du premier par le quarré du second. 4°. Le cube du second. 5°. Le triple du produit du quarré

de la somme des deux premiers par le troisiéme. 6°. Le triple du produit des deux premiers par le quarré du troisiéme. 7°. Le cube du troisiéme. 8°. Le triple du produit du quarré de la somme des trois premiers par le quatriéme. 9°. Le triple du produit de la somme des trois premiers par le quarré du quatriéme. 10°. Le cube du
*N.40. quatriéme ; ainsi de suite *.

44. On peut élever un Polinome quelconque à une puissance donnée par une voye plus courte, en lui donnant l'exposant de la puissance.

Faut-il élever $a \pm b$ à la sixiéme puissance ? écrivez $\overline{a \pm b}^{6}$; à
*N.10. la puissance n ? écrivez $\overline{a \pm b}^{n}$ *, c'est l'exaltation indiquée.

45. Pour élever par la même voye une puissance d'un Polinome à une puissance donnée, je multiplie l'exposant de celle-là

par l'expoſant de celle-ci,

Faut-il élever $\overline{a+b}^3$ à la quatriéme puiſſance ? j'écris $\overline{a+b}^{3\times 4} = \overline{a+b}^{12}$; $\overline{a+b}^x$ à la puiſſance z ? j'écris $\overline{a+b}^{xz}$.

46. Enfin pour multiplier l'une par l'autre, par une voye abregée, deux puiſſances de la même quantité complexe formées en lui donnant les expoſans de ces puiſſances *, j'ajoute enſemble leurs expoſans *. *N.44. *N.24.

Ainſi, $\overline{a+b}^3 \times \overline{a+b}^4 = \overline{a+b}^{3+4} = \overline{a+b}^7$; $\overline{a+b}^x \times \overline{a+b}^z = \overline{a+b}^{x+z}$.

N'en eſt-ce pas aſſez pour paſſer à la Diviſion ?

EUDOXE. Sans doute ; & je compte bien que ce ſera le ſujet d'un Entretien au premier jour.

III. ENTRETIEN.

Sur la Division des quantités Algébriques.

47. *Eudoxe.* Songez-vous, Ariste, qu'il est question de vous expliquer sur la maniere de diviser des grandeurs litterales?

Ariste. 3 multiplié par 4 donne 12; 12 divisé par 4 redonne 3: ainsi, comme 3 multiplié par 4 égale 12, 12 divisé par 4, égale 3 (*a*). Divisez 12 par 4, ou réduisez 12 en parties égales dont chacune contienne 4 unités: le Quotient est 3; & 3 égale 12 divisé par 4: car 3 parties de 4 unités chacune valent 12.

48. Une ligne sous le Dividende & sur le Diviseur, mis en fraction, est le signe de la Division;

(*a*) Calcul numérique, N. 29 & 30.

ainsi $\frac{12}{4} = 3$ * & l'expression $\frac{12}{4}$ de la Division, ou la Division même, peut-être prise pour le Quotient. * N. 47.

49. La Division algébrique n'étant qu'une Division numérique indiquée, il en sera de celle-là comme de celle-ci ; & $\frac{a}{b}$, exprimera la Division de a par b.

50. Le caractere du Quotient est d'exprimer combien de fois le Diviseur est contenu dans le Dividende : de-là, le Quotient multiplié par le Diviseur égale le Dividende, si la Division est exacte ou sans reste (a), comme le Dividende divisé par le Multiplicateur égale le Quotient: $3 \times 4 = 12$; $\frac{12}{4} = 3$. En un mot, la Division est pour ainsi dire, l'Antipode de la Multiplication. Donc si $\frac{a}{b} = c$, $bc = a$, & si le Quotient multiplié par le Diviseur égale le Dividende, la division est juste.

(a) Calcul numérique, N. 39.

51. Enfin quelquefois les lettres du Diviseur ne sont pas dans le Dividende; quelquefois elles y sont.

52. *EUDOXE*. Pour diviser une quantité incomplexe ab par une autre cd dont les lettres ne sont pas dans le Dividende, je vois assez ce que vous faites.

ARISTE. J'écris le Dividende ab sur le Diviseur cd, & j'ai $\frac{ab}{cd}$, expression qui est égale au Quo-
*N.48. tient *.

53. *EUDOXE*. Pour diviser une quantité incomplexe ab par une autre a qui est dans le Dividende..

ARISTE. 1°. J'écris le Diviseur a sous le Dividende ab; & j'ai $\frac{ab}{a}$.

2°. Je soustrais la quantité commune a; & le reste b est le Quo-
*N.50. tient *; puisque $b \times a = ab$.

Ainsi le Quotient de $\frac{a^2b^3}{ab}$ sera
*N.23. ab^2; puisque $ab^2 \times ab = a^2b^3$ *: de-

là $\frac{ab}{a} = b$, $\frac{a^2b^3}{ab} = ab^2$*. *N.48.

54. *EUDOXE.* Pour diviser la quantité par elle-même?....

ARISTE. J'écris 1 au Quotient, parce qu'une grandeur est une fois dans elle-même; $\frac{a}{a} = 1$; aussi $a \times 1 = a$*. De-là le signe $\frac{a}{a}$ de la *N.16. Division d'une grandeur divisée par elle-même peut être pris pour l'unité.

55. *EUDOXE.* Pour diviser une quantité qui a des coëfficiens par une autre....

ARISTE. Je divise d'abord le coëfficient par le coëfficient; puis la quantité littérale par la quantité littérale; & le premier Quotient mis devant le second, fait avec lui le Quotient total*. *N.50.

Faut-il trouver le Quotient de $\frac{4ab}{2a}$? Le Quotient de 4 par 2 est 2; de ab par a est b*: donc $\frac{4ab}{2a} = 2b$: *N.53.

aussi $2b \times 2a = 4ab$.

56. Je donne au Quotient le signe +, si le Dividende & le Diviseur ont le signe + ou le signe —; le signe —, si l'un a + & l'autre —; parce que le Quotient doit, étant multiplié par le Diviseur, donner le Dividende *, & que + par + ou — par — donne +; que + par — ou — par + donne — *.

* N. 50.
* N. 18.

Ainsi, $\frac{6abc}{3ab} = \ldots 2c$. $\frac{-6ab}{-2a} = + 3b$. $\frac{6a^2b}{-2a} = -3ab$. $\frac{-9ab^2}{3ab} = -3b$.

57. Si les nombres seuls ou les lettres seules peuvent se diviser exactement; je divise ce qui peut se diviser exactement, & mets le reste en fraction : le Quotient de $\frac{6ab}{3c}$ sera $2\frac{ab}{c}$; car $\frac{6}{3} = 2$. De-là $\frac{6abc}{4ab} = \frac{6c}{4}$.

58. Si les nombres ni les lettres ne sçauroient se diviser exactement

ment, je mets tout en fraction *. *N.52.
Faut-il diviser $4ab$ par $-3c$? J'écris $\frac{4ab}{-3c}$; $-3ab$ par $-2c$? $\frac{-3ab}{-2c}$, & c'est diviser par *induction*.

59. *Eudoxe*. Pour diviser une puissance incomplexe par une puissance de la même quantité...

Ariste. De l'exposant de celle-là, j'ôte l'exposant de celle-ci; & la différence est le Quotient. Car en ajoutant les exposans des puissances de la même grandeur, on multiplie ces puissances *: donc *N.24. on divise les puissances en retranchant les exposans des exposans; puisque la Division est le contraire de la Multiplication *. *N.50.

Ainsi $\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$. $\frac{a^5b^4}{a^3b^2} = a^{5-3}\,b^{4-2} = a^2b^2$. $\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$. De-là $\frac{a^4}{a^4} = 1$ *: or $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4}$ *N.54. $= a^0$: donc $a^0 = 1$. Par consé-

quent a^0 n'eſt pas élevé ; ce n'eſt pas la même choſe que a^1. Auſſi
*N.20. $a^1 \times a^1 = a^2$ *, & $a^0 \times a^0 = 1 \times 1$
*N.59. $= 1$ *.

60. *EUDOXE*. Pour diviſer une quantité complexe par une incomplexe.....

ARISTE. J'ôte du Dividende ce qu'il a de commun avec le Divi-
*N.50. ſeur, & le reſte eſt le Quotient *; puiſque ce reſte multiplié par le Diviſeur, donne le Dividende.

S'il faut diviſer $ax + bx - cx$ par x, j'écris

$$ax + bx - cx \left\{ \frac{x}{a + b - c} \right. :$$

car $\overline{a + b - c} \times x = ax + bx -$
*N.27. cx *.

61. *EUDOXE*. Enfin il faut diviſer une quantité complexe par une autre....

ARISTE. 1°. J'ordonne les quan-
*N.33. tités *.

2°. J'écris le Diviſeur à la droite du Dividende ſur un trait cou-

pant une ſorte de croiſſant.

3°. Je diviſe le premier terme du Dividende par le premier du Diviſeur, comme les quantités incomplexes *; & j'écris le Quotient ſous le Diviſeur. *N. 53. & 54.

4°. Je multiplie ſucceſſivement le Diviſeur par le Quotient *, commençant par la gauche du Diviſeur; & je mets le premier produit partial ſous le premier terme du Dividende, le ſecond ſous le ſecond, &c. avec des ſignes contraires qui en expriment la ſouſtraction *. *N. 28. &c. *N. 12.

5°. Faiſant la réduction des termes ſemblables, j'écris le reſte deſſous.

6°. J'opère de la même manière ſur le reſte, tandis qu'il peut ſe diviſer.

Si la réduction devient égale à zero, la Diviſion eſt éxacte.

S'il reſte quelque choſe qui ne puiſſe ſe diviſer éxactement, je le

*N. 58. mets en fraction sur le Diviseur *.

Eudoxe. *Exemple I.*

Il faut diviser $2ab+b^2+a^2$ par $a+b$.

Ariste. Soit le Dividende or-
*N. 33. donné *.

	$a^2+2ab+b^2$	$a+b$, diviseur.
		$a+b$, quotient.
1r. prod. soust.	$-a^2-1ab$	
1re. réduc.	o $\quad ab+b^2$	
2e. prod. soust.	$-ab-b^2$	
2e. réduction.	o $\quad$ o	

1°. Je divise a^2 par a, retran-
*N. 53. chant a de a^2 * ; & le Quotient est a, que j'écris au Quotient sous le Diviseur partial a.

Puis multipliant le Diviseur $a+b$ par a, je dis : $a\times a=a^2$; j'écris a^2 avec un signe de soustrac-
*N. 12. tion, ou $-a^2$ sous a^2 * ; & je dis : $b\times a=ab$; j'écris $-1ab$ sous $2ab$.

Enfin réduisant les quantités
*N. 8. semblables *, je dis : $a^2-a^2=o$,

je pose o dessous. $2ab - 1ab = ab$, que j'écris dessous; & le reste du Dividende total est o, $ab + b^2$.

2°. Opérant de même sur ce reste, je dis: le Quotient de ab par a est b*; j'écris $+ b$ au Quotient. *N.53.

Ensuite multipliant le Diviseur $a + b$ par b, je dis: $a \times b = ab$; j'écris ce produit partial avec un signe contraire, ou $-ab$ sous $+ ab$; & je dis: $b \times b = b^2$; j'écris de même ce produit ou $- b^2$ sous b^2.

Enfin réduisant les quantités semblables, je dis: $ab - ab = o$; $b^2 - b^2 = o$; & puisqu'il ne reste rien, la Division est éxacte *. *N.50.

Ainsi le Quotient total est $a + b$.

EUDOXE. *Exemple II.*

Il faut diviser $-2ab + a^2 + b^2$ par $a - b$

ARISTE. Soit le Dividende ordonné.

$$a^2 - 2ab + b^2 \left\{ \begin{array}{l} a-b, \text{ diviseur.} \\ \hline a-b, \text{ quotient.} \end{array} \right.$$

1r. prod. souſt. $-a^2 + ab$

1re. réduction. $0 \quad -ab + b^2$
2e. prod. souſt.... $+ab - b^2$

2e. réduction..... $0 \quad 0$

*N.53. 1°. Je dis : $\frac{a^2}{a} = a$ * ; j'écris a au Quotient.

Enſuite je dis : $a \times a = a^2$; j'écris ce produit avec un ſigne contraire ou $-a^2$ ſous a^2 ; & je dis :
*N.18. $-b \times a = -ab$ * ; j'écris ce ſecond produit ſous $-2ab$ avec un
*N.12. ſigne contraire, ou $+ab$ *.

Enfin réduiſant les quantités ſemblables, je dis $a^2 - a^2 = 0$; & $-2ab + ab = -ab$.

Ainſi le reſte eſt $-ab + b^2$.

2°. Opérant de même, je dis :
*N.53. $\frac{-ab}{a} = -b$ * ; j'écris $-b$ au Quotient.

Puis multipliant le Diviſeur a

$-b$ par le Quotient $-b$, je dis: $a\times -b = -ab$, & $-b\times -b = +b^2$ *; or ce produit total *N.17. étant soustrait, devient $+ab - b^2$ *. *N.12.

Enfin réduisant les quantités semblables, je dis: $-ab + ab = 0$, & $+b^2 - b^2 = 0$.

Puisqu'il n'y a point de reste; la Division est éxacte. Donc le Quotient est $a - b$.

Eudoxe. Il faut diviser maintenant des grandeurs complexes qui ayent des coëfficiens.

Ariste. Soit le Dividende,

	$6b^3 - 13b^2c + 6bc^2$	$\left\{\begin{array}{l} 2b^2 - 3bc \\ \hline 3b \;\; - 2c. \end{array}\right.$
1r. prod. soust.	$-6b^3 + 9b^2c$	
1r. reste.....	$0 - 4b^2c + 6bc^2$	
2e. prod. soust..	$+4b^2c - 6bc^2$	
2e. reste.........	$0 \quad 0$	

1°. $\frac{6}{2} = 3$, & $\frac{b^3}{b^2} = b$, j'écris $3b$ au Quotient *. *N.55.

Ensuite multipliant tout le Di-

viſeur par $3b$, je dis : $2 \times 3 = 6$, & $b^2 \times b = b^3$. Pour ſouſtraire ce premier produit, j'écris $-6b^3$ ſous $6b^3$; & je dis : $-3 \times 3 = -9$, & $bc \times b = b^2c$; j'écris par la même raiſon $+9b^2c$ ſous $-13b^2c$.

Enfin venant à la réduction, je dis : $6b^3 - 6b^3 = 0$, je poſe o ; & $-13b^2c + 9b^2c = -4b^2c$, que j'écris deſſous.

Le reſte eſt $0 - 4b^2c + 6bc^2$.

2°. Opérant ſur ce reſte, pour aller encore plus vite, je dis : $\frac{-4b^2c}{2b^2}$ eſt $-2c$* ; j'écris $-2c$ au Quotient.

*N. 55.

Enſuite je dis : $2b^2 \times -2c = -4b^2c$, que je ſouſtrais en écrivant $+4b^2c$ ſous $-4b^2c$ * ; & je dis : $-3bc \times -2c = 6bc^2$, que je ſouſtrais en écrivant $-6bc^2$ ſous $6bc^2$.

*N. 13.

Enfin je dis : $-4b^2c + 4b^2c = 0$; & $+6bc^2 - 6bc^2 = 0$.

Et puiſque le reſte eſt o, la Diviſion eſt éxacte.

62. *EUDOXE.* Mais si dans l'opération, il vient un reste où toutes les lettres du Diviseur ne se trouvent plus....

ARISTE. Sans opérer davantage, parce qu'il ne s'offre plus de Quotient éxact, j'écris le Diviseur sous le reste, ajoutant la fraction au Quotient.

Soient le Quotient partial $ab + c^2$, le reste d^3, le Diviseur $ac - c^2$: comme les lettres du Diviseur $ac - c^2$ ne sont pas dans le reste d^3, il n'y a point de lettre dans d^3 qui puisse être un Quotient déterminé *. J'écris donc le reste d^3 sur le Diviseur $ac - c^2$; & le Quotient total est *N.50.

$$ab + c^2 + \frac{d^3.}{ac - c^2.}$$

63. *EUDOXE.* Ainsi ôtez du Dividende le dernier reste d^3; le Dividende diminué de ce reste, se divisera éxactement par le Diviseur.

Mais quelquefois il y a dans le Dividende des termes sous entendus, ou désignés par une sorte d'étoile *.

Ariste. Le Quotient multiplié par le Diviseur, les fait trouver. Ce sont termes détruits par des signes contraires; & la multiplication ressuscite, pour ainsi dire, ces termes. Je m'en rappelle un exemple ou deux. *Exemple I.*

Dividende $a^2 - b^2$ $\begin{cases} a+b, \text{ diviseur.} \\ a-b, \text{ quotient.} \end{cases}$

$$\begin{array}{l} -a^2 \\ \hline 0 \quad ab - ab \\ \quad -ab \\ \hline \quad 0 - ab - b^2 \\ \quad\ + ab + b^2 \\ \hline \quad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Je dis 1°. $\frac{a^2}{a} = a$: car $a \times a = a^2$. $a^2 - a^2 = 0$.

$a \times b = ab$; mais ab ne se trouve pas dans le Dividende $a^2 - b^2$, parce que $ab - ab = 0$. Je suppo-

ſe donc $ab - ab$: de ab, ôtez le produit $a \times b = ab$; reſte $o - ab - b^2$.

2°. $\frac{-ab}{a} = -b$; j'écris $-b$ au Quotient.

$a \times -b = -ab$; ôtez $-ab$ de $-ab$; la différence ou le reſte eſt * $-ab + ab = o$. *N. 12.

Enfin, $b \times -b = -b^2$; ôtez $-b^2$ de $-b^2$; reſte $-b^2 + b^2 = o$; & le Quotient eſt $a - b$.

Auſſi $a + b \times a - b = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Exemple II.

Divid. $b^3 - c^3$ ou $b^3 ** - c^3$ $\left\{ \begin{array}{l} b - c \text{, diviſeur.} \\ b^2 + bc + c^2 \text{, quo.} \end{array} \right.$

$$\begin{array}{lll} & -b^3 + b^2c & \\ \hline o & o + b^2c * - c^3 & \\ & -b^2c + bc^2 & \\ \hline & o \quad o + bc^2 - c^3 & \\ & \quad -bc^2 + c^3 & \\ \hline & \quad o \quad o & \end{array}$$

Je dis 1°. Le Quotient de b^3

Mais quelquefois il y a dans le Dividende des termes ſous entendus, ou déſignés par une ſorte d'étoile *.

ARISTE. Le Quotient multiplié par le Diviſeur, les fait trouver. Ce ſont termes détruits par des ſignes contraires ; & la multiplication reſſuſcite, pour ainſi dire, ces termes. Je m'en rappelle un exemple ou deux. *Exemple I.*

Dividende $a^2 - b^2$ $\begin{cases} a+b, \text{ diviſeur.} \\ a-b, \text{ quotient.} \end{cases}$

$$\begin{array}{l} -a^2 \\ \hline 0 \quad ab - ab \\ \quad -ab \\ \hline \quad 0 - ab - b^2 \\ \quad\; + ab + b^2 \\ \hline \quad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Je dis 1°. $\frac{a^2}{a} = a$: car $a \times a = a^2$. $a^2 - a^2 = 0$.

$a \times b = ab$; mais ab ne ſe trouve pas dans le Dividende $a^2 - b^2$, parce que $ab - ab = 0$. Je ſuppo-

se donc $ab - ab$: de ab, ôtez le produit $a \times b = ab$; reste $0 - ab - b^2$.

2°. $\frac{-ab}{a} = -b$; j'écris $-b$ au Quotient.

$a \times -b = -ab$; ôtez $-ab$ de $-ab$; la différence ou le reste est * $-ab + ab = 0$. *N. 12.

Enfin, $b \times -b = -b^2$; ôtez $-b^2$ de $-b^2$; reste $-b^2 + b^2 = 0$; & le Quotient est $a - b$.

Aussi $a + b \times a - b = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Exemple II.

Divid. $b^3 - c^3$ ou $b^3 * * - c^3$ { $b - c$, diviseur. / $b^2 + bc + c^2$, quo.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & -b^3 & +b^2c & \\
\hline
0 & 0 & +b^2c\ * & -c^3 \\
 & & -b^2c & +bc^2 \\
\hline
 & & 0 & 0+bc^2-c^3 \\
 & & & -bc^2+c^3 \\
\hline
 & & & 0 \quad 0
\end{array}
$$

Je dis 1°. Le Quotient de b^3

*N. 50. par b eſt b^2 *; j'écris b^2 au Quotient : car $b \times b^2 = b^3$, que je ſouſtrais, & la réduction donne o.

$-c \times b^2 = -b^2c$. Ainſi le 2ᵉ terme qui n'eſt pas exprimé au Dividende, eſt $-b^2c$ détruit par le terme oppoſé $+b^2c$.

J'écris donc par ſouſtraction $+b^2c$ ſous la place de $-b^2c$; & après la réduction, reſte o o $+ b^2c$ * $-c^3$.

2°. Le Dividende nouveau eſt donc $+b^2c$ * $-c^3$.

Or le Quotient de b^2c par b eſt bc, que j'écris au Quotient : car $b \times bc = b^2c$, que je ſouſtrais en écrivant $-b^2c$ ſous b^2c; & la réduction donne o.

$-c \times +bc = -bc^2$. Ainſi le troiſième terme qui n'eſt pas exprimé, eſt $-bc^2$ oppoſé à $+bc^2$. Je ſouſtrais ce produit en écrivant $+bc^2$ ſous la place de $-bc^2$; & le reſte eſt o o $+bc^2 - c^3$.

3°. Le Quotient de bc^2 par b

eſt c^2, que j'écris au Quotient : Car $b \times c^2 = bc^2$, que je ſouſtrais ; & la réduction donne o.

Enfin $- c \times + c^2 = - c^3$ que je ſouſtrais en écrivant $+ c^3$; & la réduction donne encore o.

Donc point de reſte, & la Diviſion eſt éxacte. Auſſi $\overline{b^2 + bc + c^2} \times \overline{b - c} = b^3 + b^2c + bc^2 - b^2c - bc^2 - c^3 = b^3 * * - c^3$.

Enfin la loi des omogènes eſt gardée, lorſque dans le Dividende & le Diviſeur ordonnés, chaque terme des deux grandeurs complexes a même nombre de dimenſions ; mais il n'eſt pas néceſſaire que les termes de l'une ayent même nombre de dimenſions que chaque terme de l'autre.

Et c'en eſt aſſez, ce me ſemble, pour paſſer au premier jour à l'Extraction des racines.

EUDOXE. Vous avez tout diſpoſé pour cela.

IV. ENTRETIEN.

Sur l'Extraction des Racines.

Ariste. JE vais éxercer votre patience, Eudoxe : car pour rendre mes penſées intelligibles, il faudra faire des opérations longues, & peut-être ennuyeuſes.

Eudoxe. Ignorez-vous donc, Ariſte, le plaiſir que je me fais de voir ce que peut la pénétration de l'eſprit, l'étendue de la mémoire, & la force de l'imagination? D'ailleurs, un des avantages de l'Algèbre, eſt d'occuper la capacité de notre ame ſans lui laiſſer aſſez de loiſir pour s'ennuyer.

64. *Ariste.* Commençons donc. Si l'on multiplie deux quantités différentes, ou ſemblables,

l'une par l'autre, *a* par *b*, ou *b* par *b*; ces Quantités ſont les côtés, ou les racines du produit, ou de la puiſſance.

65. Racine d'une puiſſance eſt une quantité plus ſimple, qui multipliée un certain nombre de fois par elle-même, donne une puiſſance propoſée *. *N.22.

Chaque Racine tire ſon nom de la puiſſance à laquelle on la rapporte; ainſi la Racine du quarré ou de la ſeconde puiſſance, eſt *Racine quarrée* ou *Racine* 2e.; de-là, *Racine cube* ou *cubique*, ou troiſième; *Racine quarrée-quarrée* ou quatrième; Racine cinquième, &c.

a, regardée comme racine du quarré a^2, ou du cube a^3, &c. eſt racine quarrée ou racine ſeconde; racine cubique ou troiſième, &c.

66. *EUDOXE.* Mais la quantité négative $-a$ ſeroit-elle racine de $-a^2$?

ARISTE. Ni a, ni $-a$ ne l'eſt: car $+a \times +a = +a^2$, & $-a \times$
*N.18. $-a = +a^2$ *. Ainſi la racine d'un quarré négatif, comme $-a^2$, eſt une grandeur impoſſible, ou imaginaire.

Mais $-a$ peut-être racine cubique de $-a^3$: car $-a \times -a$
*N.16. $= a^2$, & $a^2 \times -a = -a^3$ *.

En général, une puiſſance négative qui a pour expoſant un nombre pair, n'a pour racine qu'une grandeur imaginaire : telle-eſt la racine de $-a^2$, de $-a^4$, &c.

Mais la racine d'une puiſſance négative qui a pour expoſant un nombre impair eſt une grandeur réelle ; telle-eſt la racine de $-a^3$, de $-a^5$, &c. c'eſt $-a$.

L'expoſant de chaque puiſſance mis ſur le ſigne $\sqrt{}$ en fait *le ſigne radical* de cette puiſſance. Ainſi $\sqrt[2]{}$ ſignifie racine ſeconde ou quarrée ; $\sqrt[3]{}$ racine troiſiéme, &c. L'expoſant de la puiſſance l'eſt de ſon

ſon ſigne radical ; on prend même $\surd$ ſans expoſant, pour le ſigne radical du quarré.

67. Extraire la racine d'une puiſſance, c'eſt la trouver cette racine, par une opération contraire à l'exaltation.

68. Le ſigne radical mis devant une quantité, comme $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$, dit qu'il faut en extraire la racine, s'il ſe peut, & autant qu'il ſe peut : car il y a des grandeurs dont la racine ne peut s'extraire ; d'autres, dont elle ne s'extrait qu'en partie.

69. Les quantités dont la racine peut s'extraire éxactement, ſont *commenſurables*, ou *rationnelles* ; les autres, *incommenſurables*, *ſourdes*, & *irrationnelles* ; comme $\sqrt{ab}$.

Quelques Problêmes vont expoſer ma penſée ſur la maniere d'extraire les racines.

PROBLÉME I.

70. *Extraire la Racine d'une puissance littérale incomplexe.*

Je divise l'exposant de la puissance par l'exposant du signe radical, & le Quotient est l'exposant de la racine; puisque ce Quotient multiplié par l'exposant du signe radical, donne l'exposant de la puissance. Faut-il extraire la racine seconde de la seconde puissance a^2 ou trouver $\sqrt[2]{a^2}$? Je divise 2 par 2; & le Quotient 1 est l'exposant de la racine a^1: car $a^{1 \times 2}$
*N.26. $= a^2$ *. Par la même raison $\sqrt[3]{a^3} = a^1$.

71. D'ailleurs, on éleve une lettre ou une puissance a^1 au second dégré $aa = a^2 = a^{1+1}$, en la doublant ou en doublant son exposant; au troisième $aaa = a^3 = a^{1+1+1}$, en la triplant ou en
*N.24 triplant son exposant *. En un

mot, en multipliant l'exposant de la lettre par l'exposant de la puissance donnée.

Donc on a la racine quarrée dans la moitié de l'exposant de la puissance; la racine cube ou troisième dans le tiers; la racine quatrième dans le quart, &c.

$\sqrt[2]{a^2} = \sqrt[2]{a^{1+1}} = a^1 = a$: aussi, $a^1 \times a^1 = a^1 a^1 = a^{1+1} = a^2$.

$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^{1+1+1}} = a^1$: aussi, $a^1 \times a^1 \times a^1 = a^{1+1+1} = a^3$.

72. De-là, si la puissance incomplexe a plusieurs dimensions qui ayent des exposans différens, la moitié de chaque exposant en sera la racine quarrée : $a^1b^2c^3$ sera la racine seconde de $a^2b^4c^6$; le tiers des exposans sera la racine cube *.

*N.71.

PROBLÉME II.

73. *Extraire la Racine seconde, du quarré d'un Binome a ± b.*

Ce quarré contient 1°. Le quarré a^2 de la premiere lettre du Binome. 2°. Un plan ou rectangle fait du double de la première, par la seconde. 3°. Le quarré de la
*N. 35. seconde *.

Cela posé, ayant ordonné le
*N. 33. quarré total $a^2 \pm 2ab + b^2$ *. 1°. Allant de la gauche à la droite, j'extrais la racine du premier quarré partial; & c'est la première lettre du Binome, ou la première racine partiale. Pour m'en assurer, je la multiplie par elle-même; & soustrais le produit, du premier quarré partial.

2°. Je double la première lettre, la première racine; & divisant le rectangle, par cette lettre doublée, j'ai dans le Quotient la seconde. Car si l'on divise un produit par une racine, le Quotient
*N. 30. est la seconde *.

3°. Ayant multiplié le Diviseur par ce second Quotient, je sou-

ſtrais le produit, du Dividende.

Enfin je ſouſtrais le quarré de la ſeconde lettre ou de la ſeconde racine partiale; & s'il ne reſte rien, l'opération eſt éxacte *. *N.50.

Exemple I.

	quarré total ordonné.	racine ou quotient.
	$a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$.
	$-a^2$	
divif.		
$2a$	$0 + 2ab + b^2$	
	$- 2ab - b^2$	
	$0 \quad 0$	

Je dis donc 1°. La racine de a^2 eſt a*; j'écris a au Quotient ou à la racine; & ayant multiplié a par a, je retranche le produit a^2 du quarré total; reſte $0 + 2ab + b^2$. *N.70.

2°. Je diviſe le reſte par le double de a, ou par $2a$; le Quotient eſt b, ſeconde racine partiale.

3°. Ayant multiplié le Diviſeur $2a$ par b, je ſouſtrais le produit $2ab$, plus le quarré partial b^2: & la réduction donne zero, qui dit

*N. 50. que l'opération eſt éxacte *.

Exemple II.

	quarré total.	racine.
	$a^2 - 2ab + b^2$	$a - b$
	$-a^2$	
diviſeur, $2a$	$0 - 2ab + b^2$	
	$+ 2ab - b^2$	
	$0 \quad 0$	

1°. Je dis : $\sqrt[2]{a^2} = a$; j'écris a : car $a \times a = a^2$. $a^2 - a^2 = 0$; reſte $0 - 2ab + b^2$.

2°. Je dis : $\frac{-2ab}{2a} = -b$; j'écris $-b$. $-b \times 2a = -2ab$. Otez $-2ab$ de $-2ab$; le reſte eſt $-2ab + 2ab = 0$.

Enfin je dis : $-b \times -b = + b^2$. Otez $+ b^2$ de $+ b^2$; reſte $+ b^2 - b^2 = 0$.

Ainſi, $a - b$ eſt la racine totale *. *N. 73.

PROBLÉME III.

74. *Extraire la Racine quarrée d'un Trinome.*

Le quarré total d'un Trinome contient celui d'un Binome, plus deux produits, deux plans, faits, l'un du double de la première lettre ou racine par la troisième * ; l'autre, du double de la seconde par la troisième. Or ces deux produits valent un produit fait du double de la somme des deux premières racines par la troisième *. Ainsi ayant les deux premières racines, j'en double la somme ; & divisant le reste du quarré total par ce double, j'ai dans le Quotient la troisième racine partiale *.

*N.35. *N.40. *N.50.

Exemple.

divis.	quarré total.	racine.
	$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$	$a+b+c$
	$-a^2$	
$2a$	$0 \quad 2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$	
	$-2ab-b^2$	
$2a+2b$	$0 \quad 0 \quad +2ac+2bc+c^2$	
	$-2ac-2bc-c^2$	
	$0 \quad 0 \quad 0$	

1°. Je dis : la racine de a^2 eſt a : car $a \times a = a^2$: auſſi $a^2 - a \times a = 0$: reſte 0 $2ab + b^2$, &c.

2°. Diviſant $2ab$ par $2a$, double de a, première racine, j'ai
N.73. pour ſeconde racine b : car $2a \times b = 2ab$: auſſi $2ab - 2a \times b = 0$, & $b \times b = b^2$; puiſque $b^2 - b \times b = 0$, reſte 0 0 $2ac + 2bc + c^2$.

3°. Je double la ſomme $a + b$ des deux racines trouvées ; & j'ai $2a + 2b$ pour troiſiéme Diviſeur.

4°. Je diviſe le reſte par $2a$
N.61. $+ 2b$; & le Quotient c, eſt la
*N.50. troiſième racine partiale * : car $2a \times c = 2ac$, $2b \times c = 2bc$, $c \times c = c^2$: auſſi $2ac - 2ac = 0$, $2bc - 2bc = 0$, $c^2 - c^2 = 0$.

Et la racine totale eſt $a + b + c$.

Connoiſſant la ſeconde puiſ-
*N.40. ſance du Quadrinome *, on en trouvera de même la racine ; ainſi de ſuite.

75. *EUDOXE*. Mais s'il vient après

après la réduction une quantité qui ne puiſſe ſe diviſer par le double du Quotient ou de la racine trouvée.....

ARISTE. La quantité propoſée n'eſt point quarrée, & je la mets ſous le ſigne radical : a^2 ſe diviſe éxactement par a ; mais b^2 ne ſe diviſe pas de même par $2a$, n'ayant point de lettre commune. Ainſi a^2+b^2 n'eſt point un quarré; & je n'exprime ſa racine qu'en mettant le ſigne radical devant avec un trait deſſus, $\sqrt{a^2+b^2}$.

Enfin pour s'aſſurer ſi la racine qu'on a trouvée, eſt la vraie, on peut l'élever à ſa puiſſance.

76. *EUDOXE*. Mais quel uſage faites-vous de ces lumières algébriques, pour les nombres ?

ARISTE. Aux grandeurs littérales répondent les nombres ; & le nombre quarré ſe forme comme le quarré littéral *. *N. 39.

Ainſi un nombre quarré contient

1°. Le quarré de la première racine partiale. 2°. Le produit du double de la première, par la seconde. 3°. Le quarré de la seconde. 4°. Le produit du double de la somme des deux premières, par la troisième. 5°. Le quarré de la troisième ; ainsi de suite.

D'ailleurs comme 1 est le quarré de 1 ; 4, de 2 ; 9, de 3 ; 16, de 4 ; 25, de 5 ; 36, de 6 ; 49, de 7 ; 64, de 8 ; 81, de 9 (a).

1 est la racine quarrée de 1 ; 2, de 4 ; 3, de 9 ; 4, de 16 ; 5, de 25 ; 6, de 36 ; 7, de 49 ; 8, de
*N.65. 64 ; 9, de 81 ; 10, de 100 *.

Ainsi tout nombre quarré de deux chiffres a sa racine dans un des chiffres simples ; & il ne faut qu'un peu d'attention pour la démêler.

Cela supposé ;

(a) Calcul numérique, N. 24.

PROBLÉME IV.

77. *Extraire la Racine quarrée d'un nombre composé de plus de deux chiffres.*

1°. Allant de la droite à la gauche, je partage en tranches par un point, de deux chiffres en deux chiffres, le nombre dont l'on cherche la racine; parce que chacun des quarrés particuliers des racines partiales peut être contenu dans une tranche de deux chiffres, puisque le quarré de 9, qui est le plus haut des neuf chiffres simples, n'est que 81, exprimé par deux chiffres. Si le nombre des chiffres est impair, la derniere tranche n'est que d'un chiffre.

2°. Il s'agit d'opérer successivement sur chaque tranche, allant de la gauche à la droite, comme dans l'extraction de la racine littérale *. *N.72.

J'appellerai *Dividende*, le reste

d'une opération partiale, joint au premier chiffre de la tranche ſuivante ; *membre de l'extraction*, le reſte joint à la tranche ſuivante. La diviſion du Dividende donnera dans le Quotient la racine partiale ſuivante ; & le membre de l'extraction contiendra, outre le produit du Diviſeur par la racine, le quarré de la racine même. La première tranche ſera le premier membre, qu'on peut abaiſſer ou non.

3°. Je prens d'abord la racine quarrée de la première tranche, ou, ſi elle n'en a pas, du quarré contenu le plus approchant ; & cette racine, miſe au Quotient, eſt la premiere racine partiale, puiſqu'elle a ſon quarré au commencement du quarré total. Pour le prouver, j'ôte de la premiere tranche le quarré de cette racine, & j'écris le reſte ſous le dernier chiffre du premier membre, s'il

*N.73. en a deux *.

4°. La tranche ſuivante abaiſſée devant ce reſte, fait avec lui un ſecond membre ; & un point ſous le premier chiffre de cette tranche, avertit que ce chiffre joint au reſte qui le précède, ayant de même un point deſſous, eſt le Dividende de ce nombre. On déſignera de la même façon les autres Dividendes particuliers.

5°. Multipliant par 2 la première racine partiale, je la double, & mets le double ſous le Dividende, c'eſt-à-dire ſous le premier chiffre de la tranche ſuivante; & s'il a plus d'un chiffre, ſous le reſte de la précèdente, pour ſervir de Diviſeur. Puis je diviſe le Dividende par ce Diviſeur; & le Quotient eſt la ſeconde racine partiale : car ce Dividende eſt le produit du double de la première, par la ſeconde *. *N.73.

Or ſi l'on diviſe un produit par une racine, le Quotient eſt l'au-

*N.50. tre racine *. J'écris la seconde racine partiale au Quotient après la première, & au Diviseur après le double de la première. Enfin je multiplie le Diviseur augmenté, sans écrire les produits particuliers, que je soustrais du 2e. membre à mesure qu'ils se présentent.

6°. Y a-t-il une 3e. tranche? L'ayant abaissée devant le reste pour faire un 3e. membre, je prens le double des 2 premières racines; je place ce double comme le premier, & opère de même.

7°. S'il y a une quatrième tranche, je prens le double des trois premières racines, comme j'ai pris le double des deux premières; & je continue d'opérer sur le double de celles-là, comme sur le double de celles-ci; ainsi

*N.74. de suite *.

8°. Si le double des racines précèdentes n'est pas contenu dans le Dividende, le Diviseur

n'étant pas contenu dans le Dividende, je ne fais que mettre zero au Quotient (*a*); & je cherche, comme auparavant, la racine partiale qui suit.

9°. Si le quarré de la racine partiale qui s'offre, n'est pas dans le nombre qui doit la donner, avec le produit de cette racine, par le double des racines précèdentes, on prend un Quotient inférieur (*b*). Et quand le nombre dont l'on cherche la racine quarrée, n'est pas quarré parfait; on se contente d'avoir la racine du quarré le plus approchant & contenu dans ce nombre *. Le nombre qui reste exprime la différence du quarré contenu & du nombre qui le contient. *N. 33.

Enfin je sçais que 399424 & 652864 sont nombres quarrés.

EUDOXE. Opérez donc sur ces nombres.

(*a*) Cal. num. N. 36. (*b*) Ibid. N. 39.

ARISTE. *Exemple I.*

Quarré	39.94.24{632, racine.
1r. memb.	39.
2e. memb.	3.94
diviſeur	1.23
3e. memb.	0.25.24
	12.62
	00.00.

1°. Ayant partagé le quarré 399424 en 3 tranches, j'ai 39.94.24.

2°. Je dis : la racine de 36, quarré le plus approchant de 39, eſt 6 : car $6 \times 6 = 36$; & $39 - 36 = 3$. J'écris le reſte 3 ſous 9, dernier chiffre de 39, premier membre.

3°. J'abaiſſe la ſeconde tranche 94 devant le reſte 3 ; & marquant un point ſous 9 auſſi bien que ſous 3, j'ai dans le membre 3.94 le Dividende 39. Je multiplie donc

6 par 2, & le produit 12, ou le double de 6, est le Diviſeur que j'écris ſous le Dividende 39. Puis je dis : combien 1 eſt il de fois dans 3 ou 12 dans 39 ? 3. J'écris 3 à la racine, & au Diviſeur. Enſuite employant la Multiplication & la Souſtraction, je dis: 3×3 =9. Otez 9 de 4, ou plûtôt de 14: reſte 5, que j'écris ſous 4, & je retiens 1; 2×3=6, & 1 que j'ai retenu, font 7; ôtez 7 de 9: reſte 2, que j'écris ſous 9. 1×3=3. Otez 3 de 3; reſte 0.

4°. J'abaiſſe 24 devant 25; & j'ai dans le troiſième membre 25. 24, le Dividende 25.2, indiqué par des points ſous 25.2. Je multiplie 63 par 2, & le produit, ou le double de 63 eſt 126, Diviſeur de ce membre

J'écris 126 ſous 25.2, & je dis: combien 1 eſt-il de fois dans 2? 2. J'écris 2 à la racine & au Diviſeur.

Puis je dis en preuve : 2×2 =4 ; 4—4=0 ; je pose 0 sous 4.

6×2 = 12. Otez 12, non de 2, mais de 12 : reste 0, & je retiens 1.

2×2=4, & 1 que j'ai retenu, font 5 ; 5 — 5=0.

1×2=2 ; 2—2=0.

Et puisqu'il ne reste rien, 632 est la racine que je cherchois.

Aussi 632×632 = 399424.

Exemple II.

```
65.28.64{ 808
 1.28.64
 1.6
 ------
   16.08
 ------
   00.00
```

1°. Je dis : la racine de 65 est 8 : reste 1. Je pose 1 sous 5 ; & j'abaisse 28 avec un point sous 2 & sous 1.

2°. Je dis : 16, double de 8 ; n'est pas dans le Dividende 12 ;

je pose o à la racine ; & j'abaisse 64 devant 128 pour avoir un Dividende & un membre suffisant.

3°. Je dis : le double de 80 est 160 : combien 160 est-il de fois dans 1.28.6, ou 1 dans 12 ? 8. Je pose 8 à la racine & au Diviseur ; car 9 seroit une racine trop grande. Et je dis : $8 \times 8 = 64$. Otez 64 de 4, ou plutôt de 64 ; reste o, & je retiens 6.

0×8, & 6 que j'ai retenu, font 6 ; $6 - 6 = 0$.

$6 \times 8 = 48$: ôtez 48 de 8, ou plutôt de 48 ; reste o, & je retiens 4.

$1 \times 8 = 8$, & 4 font 12 ; $12 - 12 = 0$.

Donc la racine est 808.

Aussi $808 \times 808 = 652864$.

Passerons-nous à l'Extraction de la Racine Cubique ?

EUDOXE. Volontiers.

ARISTE. PROBLÉME V.

78. *Extraire la Racine troiſième du cube d'un Binome littéral a+b.*

Ce cube contient 1°. Le cube de la première racine partiale. 2°. Le triple du quarré de la première, multiplié par la ſeconde. 3°. Le triple de la première, multiplié par le quarré de la ſeconde. 4°. Le cube de la ſeconde *.

*N.36. Cela poſé, 1°. Je prens la racine cubique du premier terme *, d'où j'ôte le cube de cette première racine.

*N.70.

2°. Je triple le quarré de cette racine, & ce triple eſt un Diviſeur. Je diviſe donc le ſecond terme par ce Diviſeur, & j'ai la ſeconde racine; & ayant multiplié le Diviſeur par ce Quotient, je ſouſtrais le produit, du Dividende.

3°. Je multiplie le triple de la première racine, par le quarré de la ſeconde, & retranche le pro-

duit du troisième terme.

Enfin je cube la seconde racine ; & le cube de cette racine, je l'ôte du dernier terme.

Soit le cube total, { racine.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ { $a + b$

$-a^3$

divis. $3a^2$ $0 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$-3a^2b$

$0 + 3ab^2 + b^3$

$-3ab^2$

$0 + b^3$

$-b^3$

0

1°. Je prens la racine troisième de a^3 divisant l'exposant par 3, ou prenant le tiers de l'exposant 3 *, & la racine est $a^1 = a$: car $a \times a \times a = a^3$, que j'écris sous le premier terme a^3 avec le signe de soustraction ; & je dis $a^3 - a^3 = 0$; reste donc $0, + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

*N. 70. & 71.

2°. Je triple le quarré a^2 de a ; & j'ai pour Diviseur $3a^2$.

Puis je diviſe le ſecond terme $3a^2b$ par $3a^2$; & le Quotient b eſt
*N. 50. la ſeconde racine *: car multipliez $3a^2$ par b, & retranchez le produit $3a^2b$ de $3a^2b$; reſte o, $3ab^2 + b^3$.

3°. Je triple la première racine a, & quarre la ſeconde b; & multipliant le triple de la première, par le quarré de la ſeconde, j'ai $3ab^2$, que j'ôte de $3ab^2$: reſte $o + b^3$.

Enfin je cube b; & le cube $b^3 - b^3 = o$.

Ainſi $a + b$ eſt la racine cube totale qu'il falloit trouver.

Pour s'en aſſurer, on peut cuber la racine totale $a + b$; & ſi l'on retrouve le cube total, l'opération eſt juſte.

S'il y avoit quelque reſte au Quotient, & qu'en cubant les racines on trouvât dans le produit le cube des racines avec ce reſte, l'opération ſeroit bonne: mais la quantité propoſée ne ſeroit pas un cube éxact.

On aura par la même voye la racine cubique de tous les Polinomes.

79. *EUDOXE.* Venons donc à l'extraction des racines cubiques des nombres.

ARISTE. Le cube de 1 est 1; car 1×1×1 est 1 (*a*); le cube de 2 est 8, puisque 2×2×2=8. Par la même raison, le cube de 3 est 27; de 4, 64; de 5, 125; de 6, 216; de 7, 343; de 8, 512; de 9, 729.

Si l'on met les nombres simples
1.2.3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
sur les nomb. 1.8.27.64.125.216.343.512.729;
Ceux-ci seront les cubes de ceux-là; & ceux-là par conséquent les racines cubiques de ceux-ci.

80. 9, le plus haut des nombres simples, a pour cube 729, nombre de trois chiffres; 10, le plus bas des nombres composés, a pour cube 1000, nombre de

(*a*) Calcul numérique, N. 20.

quatre chiffres : donc tout nombre de trois chiffres a dans un des chiffres ſimples ſa racine cube, ou la racine du cube le plus approchant : donc le cube total a dans ſa racine totale, autant de chiffres ſimples qu'il contient de tranches de trois chiffres. Ainſi, pour trouver la racine cubique d'un nombre compoſé de plus de trois chiffres, on commence par le diviſer de la droite à la gauche en tranches de trois en trois. La dernière aura moins de trois chiffres, s'il n'en reſte pas trois; une tranche peut avoir ſa racine cube particulière, ſans être compoſée de trois ou de deux chiffres, puiſque 8 a 2 pour racine cubique.

81. Le cube numérique, ainſi que le cube littéral, contient 1°. Le cube de la première racine partiale. 2°. Le triple du quarré de la première, multiplié par

par la ſeconde. 3°. Le triple de la première, multiplié par le quarré de la ſeconde. 4°. Le cube de la ſeconde. 5°. Le triple du quarré de la ſomme des deux premières, multiplié par la troiſième. 6°. Le triple des deux premières, multiplié par le quarré de la troiſième. 7°. Le cube de la troiſième, ainſi de ſuite *.

*N. 36 & 39.

82. Enfin nous appellons *membre de l'extraction*, ce qui contient le Dividende, une racine & le cube partial de cette racine. Des points ſous le premier chiffre de la tranche ſuivante & ſous les chiffres du reſte précèdent, déſigneront le Dividende qui empiéte d'un chiffre ſur la tranche ſuivante.

Cela poſé;

PROBLÉME VI.

83. *Extraire la racine cubique d'un nombre.*

1°. Allant de la droite à la gau-

che, je coupe le nombre en tranches de trois chiffres.

2°. Allant de la gauche à la droite, je prens la racine cube partiale de la première tranche, ou du cube contenu & plus approchant. J'ôte de la première tranche le cube de la première racine, marquant le reste, s'il y en a, sous les deniers chiffres de cette tranche.

3°. Ayant triplé le quarré de la première racine partiale, je place le triple, ensorte que le dernier chiffre soit sous le premier de la tranche suivante, & les autres, s'il y en a plusieurs autres, sous la première. Je divise par ce triple le Dividende ou le solide sous lequel il est, pour avoir dans le Quotient la seconde racine par-
N.50 tiale *. Puis ayant multiplié le Diviseur par le Quotient, je soustrais le produit.

4°. Ayant pris le produit du triple de la première racine par le

quarré de la feconde, je retranche ce produit du nombre de deffus augmenté d'un chiffre. Enfin, je fouftrais le cube de la feconde racine.

5°. Je prens le triple du quarré de la fomme des deux premières racines. Je divife par ce triple placé comme le Divifeur précèdent; & le Quotient eft la troifième racine. Enfuite je multiplie le Divifeur par la troifième racine. Je fouftrais ce produit, plus le produit du triple de la fomme des deux premières par le quarré de la troifième, plus le cube de la troifième; ainfi de fuite *. *N.47.

6°. Si un Divifeur n'eft pas contenu dans le Dividende partial, on écrita zero à la racine (a); & fi le produit du Divifeur par une racine particulière ne fe trouve point avec le cube de cette racine dans le membre fur lequel on

(a) Calcul numérique, N. 36.

opère, on prendra une racine plus petite (*a*), comme on a fait dans l'extraction des racines quarrées.

84. Voici quelques éxemples que j'ai rédigés suivant ma maniere.

Exemple I.

	Cube total	racine totale.
	152.273.304	534.
1r. mem.	152.	
2e. mem.	27.273.	
diviseur	7.5	
reste. . .	4.773.	
	1.35.	
reste. . .	3.423.	
	27.	
3e. mem.	3.396.304.	
diviseur	842.7	
reste. . .	0.025.504.	
	25.44	
reste. . .	00.064.	
	00.	

(*a*) Calcul numérique, N. 39.

Soit donc le cube 152273304.

1°. Je le partage en trois tranches de trois chiffres chacune ; & j'ai 152.273.304.

2°. Il faut prendre la racine du cube partial le plus approchant du premier membre 152. Je dis donc : le cube le plus approchant de 152 est 125, dont la racine cubique est 5. J'écris 5 à la racine ; & je dis en preuve : le cube de 5 est 125. Otez 125 de 152 : reste 27, que je mets sous 52. J'abaisse la tranche suivante 273 devant le reste 27; & j'ai le second membre 27.273, & le Dividende 27.2.

3°. Il faut prendre le triple du quarré de la première racine, & diviser par ce triple le Dividende 27.2 pour avoir la seconde racine *. Je dis donc : le quarré de 5 est 25 ; & le triple de 25 est 75, que j'écris au Diviseur sous 7.2. Combien de fois 75 est-il dans 27.2, ou 7 dans 27 ? 3. J'écris 3

* N. 36 & 50.

N.50. à la racine. Puis employant en preuve la Multiplication & la Souſtraction ſans écrire les produits particuliers, je dis : 5×3 = 15 ; ôtez 15 de 2, ou plutôt de 22 (*a*), reſte 7, que j'écris ſous 2, & je retiens 2.

7×3=21, & 2 que j'ai retenu, font 23 ; ôtez 23 de 27 : reſte 4, que j'écris ſous 7. J'abaiſſe le reſte 73 devant 47;& j'ai le reſte 47.73.

De ce reſte 47.73 du ſecond membre, il faut retrancher le produit du triple de la première racine par le quarré de la ſeconde*, *N.36. plus le cube de la ſeconde. Je dis donc : le triple de 5 eſt 15 ; le quarré de 3 eſt 9, & le produit de 15 par 9 eſt 135, que je mets ſous 4.77.

Or, ôtez 5 de 7 : reſte 2 ; 3 de 7 : reſte 4 ; 1 de 4 : reſte 3. J'abaiſſe le reſte 3 devant 3.42.

Enfin, pour ôter du reſte 3.423

(*a*) Calcul numérique, N. 12.

du 2e. membre, le cube de la seconde racine, je dis : le cube de 3 est 27, que j'écris sous 23, chiffres de même espèce, ou qui disent également unités & dixaines. Otez 7 de 3, ou plutôt de 13 : reste 6, & je retiens 1. 1 & 2 font 3 : ôtez 3 de 2, ou plutôt de 12 : reste 9, & je retiens 1 : ôtez 1 de 4 : reste 3.

Ainsi le reste du second membre est 3. 396, qui avec la troisième tranche abaissée, fera le 3e. & dernier membre 3.396.304.

4°. Il faut diviser le Dividende de ce membre par le triple du quarré de la somme des deux premières racines pour avoir la 3e *. *N. 501

Je dis donc : le quarré de 53 est.... 2809 ; le triple de 2809 est... 8427, que je mets sous 396.3.

Combien 8427 est-il contenu de fois dans le Dividende suffisant 3.396.3, ou 8 dans 33 ? 4. 4 est donc la troisième racine partiale.

Auſſi $7 \times 4 = 28$. Otez 28 de 3, ou plutôt de 33; reſte 5, & je retiens 3.

$2 \times 4 = 8$, & 3 que j'ai retenu; font 11. Otez 11 de 6, ou plutôt de 16; reſte 5, & je retiens 1.

$4 \times 4 = 16$, & 1 que je retiens; font 17: ôtez 17 de 9 ou plutôt de 19: reſte 2; & je retiens 1.

$8 \times 4 = 32$, & 1 font 33. Otez 33 de 33: point de reſte.

J'abaiſſe le reſte 04; le reſte total eſt 25.504; d'où il faut ôter le produit du triple de la ſomme des deux premières racines, par le quarré de la troiſième, plus le cube de la troiſième.

Je dis donc: le triple de 53 eſt... 159; le quarré de 4 eſt 16; le produit de 159 par 16 eſt... 2544, que j'écris ſous 25.50 pour les en retrancher.

Otez 4 de 0, ou plutôt de 10: reſte 6, & je retiens 1. 1 & 4 font 5; ôtez 5 de 5; reſte 0; 5 de 5: reſte

reste o. 2 — 2 = o. J'abaisse le reste 4; & le reste total est 64.

Enfin, le cube de 4 est 64. 64 — 64 = o.

Donc 534 est la racine cubique de 152273304 = 534×534×534.

Exemple II.

85. Cube total 66.430.125 {racine totale. 405.

	Cube total	racine totale.
	66.430.125	405.
1r. mem.	66.	
2e. mem.	2.430.125	
divifeur	480.0	
reste. . .	0.030.125	
	30.00	
reste. . .	00.125	
	125	
reste. . .	000	

1°. Je dis: la racine cubique de 66 est 4: car le cube de 4 est 64. Otez 64 de 66; reste 2: j'écris 2 sous 6. J'abaisse la seconde tran-

che 430; & j'ai le second membre 2.430, & le second Dividende 2.4.

2°. Je dis : le triple du quarré de la première racine 4 est 48; mais 48 n'étant pas dans le Dividende partial 24, je pose o à la racine (a); & sans multiplier ni soustraire, j'abaisse la troisième tranche 125, avec un point sous 1; le Dividende sera 2.430.1.

3°. Pour découvrir la troisième racine, je dis : le quarré de 40 est... 1600; le triple de 1600 est 4800, que j'écris sous 430.1. Combien 4800 est-il de fois dans 2.430.1 ou 4 dans 24? 6. Mais 6 ne seroit-il pas trop grand?... Oui, je pose 5 à la racine.

Et je dis : $0 \times 5 = 0$ (b). Otez o de 1; reste 1.

$0 \times 5 = 0$. $0 - 0 = 0$.

$8 \times 5 = 40$. ôtez 40 de 3 ou

(a) Calcul numérique, N. 36.
(b) Ibid. N. 20.

plutôt de 43 ; reste 3, & je retiens 4.

4 × 5 = 20, & 4 font 24 : ôtez 24 de 24, reste 0.

J'abaisse 25, & le reste total est 30.125, d'où il faut ôter le produit du triple des deux premières racines, par le quarré de la troisième.

Je dis donc : le triple de 40 est 120, & le quarré de 5 est 25. Or le produit de 120 par 25 est..... 3000 que je pose sous 30.12, pour l'en retrancher. Otez 0 de 2 : reste 2 ; 0 de 1 : reste 1 ; 0 de 0 : reste 0 ; 3 de 3 : reste 0.

J'abaisse 5, & le reste total est 125.

Enfin le cube de 5 est 125, que je mets sous 125. Or 125 — 125 = 0. Donc la racine totale est 405. Aussi 405 × 405 × 405 = 66430125.

Exemple III.

86.	Cube total 91.125.000	racine totale, 450.
1r. mem.	91.	
2. mem.	27.125.	
diviſeur	4.8.	
reſte. . .	13.125.	
	3.00	
reſte. . .	0.125.	
	000.000	

Je dis 1°. $\sqrt[3]{91} = 4$; je poſe 4 à la racine : car $4 \times 4 \times 4 = 64$; & $91 - 64 = 27$: je poſe 27 ſous 91, & j'abaiſſe 125.

2°. Le triple de 16, quarré de 4, eſt 48. Combien de fois 48 eſt-il dans 27.1 ? 5. Je poſe 5 à la racine.

$8 \times 5 = 40$. Otez 40 de 1, ou plutôt de 41 : reſte 1, & je retiens 4.

$4 \times 5 = 20$, & 4 font 24. $27 - 24 = 3$.

J'abaisse 25 devant 31.

3°. Je dis : le triple de 4, ou 12 multiplié par 25, quarré de 5, est 300, que je mets sous 312.

$2 - 0 = 2$. $1 - 0 = 1$. $3 - 3 = 0$.

J'abaisse 5 : le reste total est 125.

Le cube de 5 est 125. $125 - 125 = 0$.

J'abaisse 000.

Enfin je dis : le triple du quarré de 45 n'est pas dans 000.000. Je pose 0 à la racine.

Donc 450 est la racine totale.

Aussi $450 \times 450 \times 450 = 91125000$.

87. *EUDOXE*. Mais si le nombre n'est qu'une puissance imparfaite *, & qu'on ne lui trouve point de racine exacte, quarrée ou cubique ; comment trouver, du moins, une racine intermédiaire entre celle du quarré ou du cube * N.33.

le plus approchant de ce nombre ; & la racine qu'on ne lui trouve pas ? Comment trouver une racine plus approchante de celle qu'on cherche ſans la trouver ?

ARISTE. Pour m'exprimer ſur *l'approximation des racines*.

1°. Je fais attention que lorſqu'on cherche une racine plus approchante, par exemple, de la racine quarrée, il s'agit, du moins ordinairement, de la racine d'une grandeur dont les parties ſoient quarrées ; ſi l'on cherche la racine quarrée ou approchante de 20, il eſt queſtion d'une quantité de 20 parties dont chacune ſoit quarrée, comme une toiſe quarrée, un pied quarré, un pouce quarré, &c.

2°. Si l'on réduit d'abord chaque partie d'une grandeur, en 10 parties, qu'on nomme *primes ſimples* ; puis chaque prime ſimple, en 10 parties qu'on appelle *ſecondes ;* chaque ſeconde en 10 *tier-*

ces, &c. ces parties plus petites qui composent des dixaines, sont des *parties décimales*. Ainsi 10 primes simples valent 100 secondes simples, ou 1000 tierces, &c.

3°. Je divise une partie de la quantité, dont je cherche la racine, en 10 ou en 100, &c. Ensuite ayant quarré ce nombre, c'est-à-dire, 10 ou 100, &c. je multiplie le quarré, par la quantité même, & le produit vaut cette quantité.

4°. Je prens la racine de ce produit ; & comme elle vaut la racine de la grandeur en question, j'éxamine combien la racine découverte contient de parties primitives ou d'unités de cette grandeur : & le nombre de ces parties est la racine que je cherchois.

Pour trouver la racine de 20 toises quarrées,

1°. Je divise la toise simple en 10 parties, qui sont des primes simples.

2°. Je quarre ces 10 parties : le quarré eſt 100 ; ce ſont 100 primes quarrées.

3°. Je multiplie 100 par 20 : le produit eſt 2000 ; ce ſont 2000 primes quarrées.

4°. J'extrais la racine de ces
*N.76. 2000 primes quarrées * : la racine eſt 44, avec un reſte de 64 primes quarrées. Ces 64 primes étant telles que 20 toiſes quarrées en contiennent 2000, elles ſont ſi peu de choſe qu'on peut les négliger.

5°. La racine 44 ſignifie 44 primes ſimples ou parties telles qu'une toiſe ſimple en comprend 10. Auſſi 44 primes ſimples multipliées quarrément, donnent les 2000 primes quarrées, moins 64.

6°. 44 primes ſimples étant la racine de 2000 primes quarrées, valeur des 20 toiſes quarrées, valent la racine de ces 20 toiſes. Donc connoiſſant combien 44

primes contiennent de toises simples, j'aurai la racine que je cherche.

Or 44 primes simples valent 4 toises, & 4 primes simples; puisqu'on a partagé la toise simple, en 10 primes simples.

Donc 4 toises simples & 4 primes simples sont, à-peu-près, la racine quarrée de 20 toises.

88. Voulez-vous une racine plus approchante encore?

1°. Je divise la partie de la grandeur dont je cherche la racine, en parties décimales plus petites; la toise simple, par exemple, non en 10 primes simples, mais en 100 secondes.

2°. Je quarre 100; & j'ai 10000 secondes quarrées (*a*), pour une toise quarrée.

3°. Je multiplie 10000 par 20, nombre des toises. Le produit est 200000 secondes quarrées, va-

(*a*) Calcul numérique, N. 23.

leur de 20 toises quarrées. Donc ayant la racine de 200000 secondes quarrées, j'aurai celle de 20 toises quarrées.

4°. Je prens donc la racine de
N.76. 200000 secondes quarrées ..... & j'ai 447 secondes simples, avec un reste de 191 secondes quarrées, qu'on peut négliger comme une quantité insensible, eu égard à 200000. Donc 447 secondes simples sont la racine de 20 toises quarrées.

Or 447 secondes simples valent 44 primes simples, plus 7 secondes simples, puisque $\frac{447}{10} = 44\frac{7}{10}$.

Donc la seconde racine est plus grande & plus approchante que la premiere, de 7 secondes simples.

La racine continueroit d'augmenter & d'approcher si l'on continuoit de partager la grandeur, ou la toise, en tierces, en quartes, &c.

Enfin l'on approchera de mê-

me de la racine cube. Et mon ſyſtême d'idées nous préſente les Proportions pour un autre jour.

Eudoxe. Ce ſera toujours trop tard pour moi.

V. ENTRETIEN.

Sur les Proportions en général.

Eudoxe. Vous allez donc, Ariſte, me communiquer vos idées & réveiller les miennes ſur les Proportions.

89. *Ariste*. Et je commence par quelques obſervations.

Rapport ou raiſon, eſt la manière d'être d'une grandeur à l'égard d'une autre de même eſpèce, d'un nombre à l'égard d'un nombre, d'une ligne à l'égard d'une ligne, &c.

90. Différence, eſt ce qu'une quantité a de trop, ou de trop peu

pour en égaler une autre.

Raiſon Arithmétique eſt la différence de deux quantités, exprimée de la ſorte $3 - 1$, $a - b$.

91. Raiſon géométrique eſt la manière de contenir ou d'être contenu, comme la moitié ou le tiers, &c. tel eſt le rapport de 4 à 2 ou de 2 à 4, 4 étant conſidéré comme le double de 2, ou 2 comme la moitié de 4. On l'exprime de la ſorte 4.2, ou 4:2 ou $\frac{4}{2}$; *a.b*, ou *a:b* ou $\frac{a}{b}$.

* N.48. *92.* $\frac{4}{2} = 2$ *. Or le Quotient 2 exprime la manière dont 4 contient 2 : donc la diviſion indiquée $\frac{4}{2}$ l'exprime. Ainſi la diviſion indiquée eſt un rapport géométrique *.

* N.91. *93.* Dans la raiſon géométrique ou arithmétique, le premier terme ou celui de deſſus eſt l'*antécédent*; l'autre eſt *le conſéquent*.

94. Si l'entécédent égale ſon conſéquent, comme $\frac{4}{2+2}$, c'eſt

raiſon d'égalité ; ſinon, c'eſt *raiſon d'inégalité*, comme $\frac{3}{4}$.

95. L'antécédent qui contient ſon conſéquent pluſieurs fois éxactement ou ſans reſte, en eſt *multiple ; ſou-multiple*, s'il eſt contenu de même ; *double*, *triple*, &c. ou *ſou-duble*, *ſou-triple*, &c. ſelon qu'il contient ou qu'il eſt contenu deux fois, trois, &c.

96. La quantité qui priſe un certain nombre de fois eſt égale à une autre, en eſt partie *aliquote*. Les aliquotes inégales, mais contenues également dans leurs touts, ſont *aliquotes pareilles*. Si aucune aliquote ne meſure éxactement deux grandeurs, elles ſont *incommenſurables*.

97. La raiſon d'un antécédent double, comme $\frac{6}{3}$, eſt *double* ; la raiſon d'un antécédent ſou-double, comme $\frac{3}{6}$, eſt *ſou-double*.

98. Si deux antécédens contiennent leur conſéquent de la mê-

me manière, les raisons sont égales; ainsi $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$; si a contient b, comme c contient d, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $a.b = c.d.$

99. La raison des touts & la raison des parties semblables, c'est-à-dire, des moitiés, des tiers, &c. sont égales *: car comme le
*N.98. tout contient le tout, la moitié contient la moitié, le tiers, le tiers, &c. $\frac{18}{12} = \frac{9}{6}$.

Mais la raison est plus grande, si l'antécédent étant le même, le conséquent est plus petit, ou si l'antécédent est plus grand, le conséquent étant le même; $\frac{8}{2} > \frac{6}{2}$; 8 contient plus de fois 2, que 6 ne contient 2; ainsi, $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b}$. La raison est plus petite, si l'antécédent étant le même, le conséquent est plus grand; $\frac{16}{8} < \frac{16}{4}$; 16 contient moins de fois 8, que 16 ne contient 4: ainsi $\frac{a}{b+c} < \frac{a}{b}$.

100. Si un nombre ou une lettre exprime une raifon, il eft l'*expofant*; comme $\frac{8}{4} = 2$ *, 2 eft l'expofant de $\frac{8}{4}$, ou de la raifon double de 8 à 4. *N.48.

Si $\frac{a}{b} = x$, x fera l'expofant de $\frac{a}{b}$; & comme $x = \frac{a}{b}$, cette expreffion $\frac{a}{b}$ fera elle-même l'expofant de la raifon de a à b.

101. On appelle encore expofans d'une raifon les deux plus petits termes qui ont même raifon que deux autres : de-là $2.1 = \frac{2}{1}$ font les expofans de la raifon de 8 à 4.

102. Les expofans égaux font expofans de raifons égales, puifqu'ils expofent ou qu'ils difent chofes égales. Donc fi x, expofant de $a.b$, ou $\frac{a}{b}$, & z, expofant de $c.d$ font égaux, $a.b = c.d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

103. Les raifons égales ont

des expoſans égaux, puiſqu'ils ſont les expreſſions des choſes égales : donc ſi $a.b = c.d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & que x & z ſoient leurs expoſans, $x = z$.

Enfin quelques Propoſitions déveloperont encore quelques vérités néceſſaires pour l'intelligence des choſes que nous avons à dire.

PROPOSITION I.

104. Deux raiſons égales à une troiſième ſont égales entr'elles.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, je dis que $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.

Dans cette hypotèſe, $\frac{a}{b}$ & $\frac{e}{f}$ ont le même expoſant, ou l'expoſant de $\frac{c}{d}$ * : donc $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ **.

* N. 103.
** N. 102.

PROPOSITION II.

105. Si l'on diviſe le plus grand terme d'une raiſon par le plus petit

on peut mettre le produit du Quotient ou de l'exposant par le plus petit terme, à la place du plus grand.

Si $\frac{a}{b} = c$, je dis qu'on peut mettre bc au lieu de $a. bc = a$ *, *N. 50. puisque le produit du Diviseur par le Quotient est égal au Dividende.

PROPOSITION III.

106. *Deux quantités qui ont même raison à une troisième, sont égales entr'elles.*

Si $\frac{b}{c} = \frac{d}{c}$, je dis que $b = d$.

Soit $\frac{b}{c} = n$: donc $\frac{d}{c} = n$ *: * N. 103. donc $cn = b$, & $cn = d$*: donc * N. 105. $b = d$.

EUDOXE. Votre manière est précise & nette.

ARISTE. Et nous voilà parvenus aux Proportions : car qu'est-ce que Proportion ?...

107. EUDOXE. Egalité de rap-

ports ou de raisons.

108. *Ariste*. De-là, Proportion Arithmétique sera égalité de différences, comme $\frac{1}{3} = \frac{5}{7}$, ou 1.3:5.7 = *a.b:c.d.*

109. Proportion Géométrique est égalité de raisons, ou de rapports Géométriques, comme $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, ou 2.4::3.6.

110. La proportion est *directe*, si les termes sont rangés de manière que le 1er. soit au 2e. comme le 3e. au 4e. comme 1.3:5.7 = *a.b:c.d*, ou 2.4::3.6 = *a.b::c.d: indirecte*, ou *inverse* si les termes sont rangés de manière que le 1er. soit au 2e. comme le 4e. au 3e. comme 1.3:7.5 = *a.b:d.c*, ou 2.4::6.3 = *a.b::d.c*: *continue*, quand le même terme est conséquent du premier rapport & antécédent du 2e. comme ÷ 1.3.5 = ÷ *a.b.c* = *a.b:b.c*, ou ∷ 2.4.8 = 2.4::4.8 = ∷ *a.b.c* = *a.b::b.c.*

111. Les termes de la pro-

portion ſont *proportionnels.* Dans la *directe*, les deux du milieu ſont les *moyens*;les deux autres ſont les *extrémes*; dans la *continue*, celui du milieu eſt *moyen proportionnel.*

Enfin, la proportion & la progreſſion Arithmétiques viennent ſe préſenter naturellement pour être dévelopées.

EUDOXE. Remettons-les à ce ſoir. Deſcendons un moment d'un monde purement intelligible dans le monde matériel pour apprendre ce qui s'y paſſe de nouveau.

VI. ENTRETIEN.

Sur la proportion & la progreſſion Arithmétiques.

EUDOXE. DAns des Entretiens politiques, on peut ſans conſéquence, ſe répandre en réflexions inutiles; &

c'eſt aſſez la coutume de le faire : mais dans des entretiens algébriques, il faut, ce ſemble, aller vite au fait, & ſans écart ; quand l'eſprit a perdu le fil des vérités abſtraites qui naiſſent les unes des autres, il a de la peine à les ſaiſir.

ARISTE. Auſſi quelques Propoſitions accompagnées de quelques Problêmes, expoſeront d'abord mes penſées, ſans autres ornemens que ceux de la vérité la plus ſimple.

PROPOSITION I.

112. *Dans la proportion arithmétique, l'antécédent, plus ou moins la différence, eſt égal au conſéquent.*

Car la différence eſt ce que l'antécédent a de moins ou de plus
*N. 90. que ſon conſéquent *.

Soit la différence 2, dans la proportion aſcendante $\div 1.3.5$: $1+2=3$, & $3+2=5$; dans la deſcendante $\div 5.3.1$, $5-2=3$, & $3-2=1$.

Donc si la différence est x dans $\div a.b.c$, $a+x=b$, & $b+x=c$; & par conséquent $c-x=b$, & $b-x=a$.

113. De-là, l'on peut mettre l'antécèdent, plus ou moins la différence x, pour le conséquent. Si $a\pm x=b$, on pourra prendre $a\pm x$ au lieu de b; $a\pm x\pm x$, ou $a\pm 2x$ au lieu de c, &c. Ainsi, $a.b : c.d = a.a+x : a+2x.a+3x$*. * N. 8.

PROPOSITION II.

114. Dans la proportion Arithmétique, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.

Si $a.b : c.d$, je dis que $a+d=b+c$. Soit la différence $=x$.

$a.b : c.d = a.a+x : a+2x.a+3x$*; or $a+a+3x=2a+3x$, somme des extrêmes, vaut $a+x+a+2x=2a+3x$, somme des moyens. * N. 113.

Aussi dans $1.3 : 5.7$, $1+7=3+5=8$.

115. De-là, dans la proportion continue $\div a.b.c$, la somme $a + c$ des extrêmes vaut le double $b + b$ du moyen b : car $\div a.b.c = a.b : b.c$ *, ou $a + c = b + b$ **.

* N. 110.
** N. 114.

PROBLÉME I.

116. Connoissant les trois premiers termes d'une proportion Arithmétique, trouver le quatrième.

De la somme des moyens j'ôte le premier terme : le reste est le quatrième ; puisque la somme des moyens est égale à celle des extrêmes*. Soient 8.11 : 7. Je dis : 11 + 7 = 18 ; 18 — 8 = 10 : donc 8.11 : 7.10. Si dans $a.b : c.z$, je connois précisément $a.b : c$, je dis : $b + c = a + z$ *, donc $b + c - a = z$; & je connois z.

* N. 114.
* N. 114.

PROBLÉME II.

117. Trouver un moyen proportionnel Arithmétique entre deux termes connus.

Je prens la moitié de la somme des extrêmes ; & cette moitié est le moyen * ; puisqu'étant doublée, elle vaut la somme des extrêmes. Si $a + c = b + b$, $\div a.b.c.$ * N. 115.

Soient 3....7 : je dis : $3 + 7 = 10$: or, la moitié de 10 est 5 : donc 5 est le moyen proportionnel, ou $\div 3.5.7.$

118. EUDOXE. Venons à la progression Arithmétique.

ARISTE. Ce n'est que la proportion continuée, comme $\div 1.2.3.4.5$, &c. $= \div a.b.c.d.e$, &c. ou la différence est toujours la même.

119. La progression Arithmétique ascendante peut commencer par zero, comme 0.1.2.3.4, &c.* car la différence de zero à 1, de 1 à 2, &c. est la même ; $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 2$, &c. & la grandeur est inépuisable. * N. 118.

120. La descendante peut descendre jusqu'à zero en termes po-

sitifs, comme 4.3.2.1.0; non en termes négatifs: car point de termes positifs au-dessous de zero; $0 - 1$ n'égale pas un terme positif.

121. Mais elle descend au-dessous de zero en termes négatifs à l'infini : car $0 - 1 = - 1$; $- 1 - 1 = - 2$. $- 2 - 1 = - 3$, &c. $3 - 2 = 1$; $1 - 2 = - 1$. $- 1 - 2 = - 3$, &c.

122. *EUDOXE.* S'il falloit continuer une progression Arithmétique dont vous eussiez le premier terme & la différence.....

ARISTE. Ajoutant au premier terme la différence, ou l'en ôtant, j'aurois le second; ajoutant au second la différence, ou l'en retranchant, j'aurois le troisième,
* N. ainsi de suite *.

113. Soient donc a, le premier terme; x, la différence: $a \pm x$ sera le second terme; $a \pm 2x$, le troisième, &c. ainsi j'écris $\div\ a . a \pm x$.

a

$a+2x.\ a+3x.\ a+4x$, &c. ou $\div a.\ a-x.\ a-2x.\ a-3x.\ a-4x$, &c. & c'eſt la progreſſion continuée.

Ajoutez toujours 2, vous aurez $\div 1.3.5.7.9$, &c.

Otez toujours 2 : vous aurez $9.7.5.3.1$.

123. EUDOXE. Apparemment que vous faites la ſomme des extrêmes, égale à celle de deux termeségalement éloignés des extrêmes.

ARISTE. Sans doute. Soit $\div a.b.c.d.e$: je dis que $a+e=b+d$. $a.b : d.e$ *, puiſque la différence eſt la même : donc $a+e=b+d$ *. * N. 118. * N. 114.

D'ailleurs dans $\div a.a+x.\ a+2x.\ a+3x.\ a+4x$, $a+x+a+3x=a+a+4x$.

Auſſi dans $\div 1.3.5.7.9$, $1+9=3+7=10$.

124. De-là le double du terme c du milieu, vaut la ſomme des ex-

trêmes; car étant moyen proportionnel, il vaut, $c+c$ deux termes également éloignés des extrêmes a & e.

125. *EUDOXE.* Une belle proprieté de cette progression $\div a.b.c.d.e$, c'est que chaque terme contient, ce me semble, le 1[r], & autant de fois la différence x, qu'il y a de termes qui le précèdent.

ARISTE. En effet, $e = a + 4x$: car $\div a.b.c.d.e = \div a.a+x.a+2x.a+3x.a+4x$, &c*: donc $e = a + 4x$.

* N. 112.

126. Et par conséquent si l'on ôte le premier terme a du dernier e, le reste est le produit de la différence, par le nombre des termes qui précèdent le dernier: car de $a + 4x = e$, ôtez a: reste $4x = a + 4x - a$, ou $4x$.

Aussi soit $\div 1.3.5.7.9$, dont la différence est 2, & le nombre des termes qui précèdent le dernier, est 4: $9 - 1 = 2 \times 4 = 8$.

127. *EUDOXE.* Ainſi connoiſſant le premier terme a de la progreſſion $\div a.b.c.d.e = \div a. a+x. a+2x. a+3x. a+4x$, avec le dernier e, & le nombre 5 des termes, on aura la différence x.

ARISTE. 1°. Du dernier terme $a+4x=e$*, j'ôte le premier a; reſte $4x=e-a$*, produit de la différence x par le nombre des termes qui précèdent le dernier. * N. 125. * N. 126.

2°. Je diviſe le produit $e-a = 4x$ par 4, nombre de ces termes; & le Quotient $= x$*. *N. 50.

EUDOXE. La dépenſe croiſſant tous les jours également, on a dépenſé le premier jour, 2 louis; le cinquième, 14: combien chaque jour?

ARISTE. C'eſt une progreſſion de 5 termes, dont je connois le premier, 2, & le dernier, 14, avec le nombre des termes, 5: la différence connue me donnera la dépenſe de chaque jour.

De 14, j'ôte 2 : reſte 12 : donc 12 eſt le produit de la différence par le nombre 4 des termes qui précèdent le dernier 5 * : donc diviſant 12 par 4, j'aurai dans le Quotient 3 la différence *.

* N. 126.

*N. 50.

Ainſi ayant dépenſé 2 louis, le premier jour ; 14, le cinquième, on en a dépenſé 5, le ſecond ; 8, le troiſième ; 11, le quatrième, ſuivant la progreſſion ÷ 2.5.8.11.14.

128. Mais connoiſſant le premier terme a, le dernier e, & la différence x, il s'agit de trouver le nombre y des termes.

EUDOXE. $\frac{e-a}{x}+1=y$*. Cela poſé ;

* N. 126.

1°. Du dernier, ôtez le premier.

2°. Diviſez le reſte par la différence x : & le Quotient ſera le nombre des termes qui précèdent le dernier.

3°. Ajoutez 1 à ce nombre; & la ſomme ſera le nombre des termes.

Ariste. On a payé 2 louis, le premier jour; 4, le ſecond; 10, le dernier: combien s'eſt-il écoulé de jours dans le payement?

Eudoxe. C'eſt une progreſſion dont l'on connoît le premier terme 2, le dernier 10, la différence 2: le nombre des termes ſera le nombre des jours.

Or, 1°. Du dernier terme 10, ôtez le premier, 2: reſte 8, produit de la différence par le nombre des termes qui précèdent le dernier.

2°. Diviſez 8 par 2, qui eſt la différence: & le reſte 4 ſera ce nombre.

3°. A 4, ajoutez 1: & $4+1=5$ ſera le nombre total des termes, ou des jours.

Ou en un mot, $10-2=8.\frac{8}{2}=4.\ 4+1=5.$

Donc le payement s'est fait en 5 jours.

129. Mais connoissant le premier terme, le dernier, & la différence, trouverons-nous les termes intermédiaires?

ARISTE. Le premier & la différence connue font le second; le second & la différence, le troisième, &c. ainsi nous aurons tous les termes. Otons le premier & le dernier, les intermédiaires feront le reste.

130. Mais connoissant le premier terme a, & la différence x, trouverons-nous un terme donné, par éxemple, le cinquième, e?

EUDOXE. Le cinquième, $e = a + 4x$ *: donc en ajoutant le premier terme au produit de la différence par le nombre des termes qui sont avant le terme donné, on aura ce terme dans la somme.

* N. 125.

131. Avez-vous observé que le coëfficient de la différence

d'un terme, plus 1, en exprime la place?

ARISTE. Oui, $a + 2x$, par exemple, eſt le troiſiéme terme* exprimé par $2 + 1$. * N. 125.

Ainſi l'unité ajoutée au coëfficient de la différence d'un terme, en exprimera encore * la place; $a + 5x$ ſera le ſixième terme.

132. Vous avez obſervé ſans doute que dans une progreſſion dont le nombre des termes eſt pair, le produit de la ſomme des extrêmes par la moitié du nombre des termes, vaut la ſomme des termes?

EUDOXE. Soit ÷ $a.b.c.d$, compoſée de 4 termes, dont la ſomme $= s$.

Je dis que $a + d$, pris deux fois, ou $2a + 2d = s$.

$a + d = b + c$*: donc $2a + 2d = s$. * N. 114.

Ce ſera la même choſe, ſi les termes ſont impairs; puis qu'on

pourra les réduire à un nombre
* N. pair *.
124. 133. *Ariste.* Ainsi connoissant le premier des termes pairs, leur nombre, la différence, on trouvera la somme.

Dans cette vûe, 1°. Je cher-
* N. che le dernier terme *, & l'ajou-
130. tant au premier, j'ai la somme des extrêmes.

2°. Je multiplie cette somme par la moitié du nombre des termes; & le produit est la somme
* N. de la progression *.
132. *Eudoxe.* Hé bien, l'on veut planter des arbres ou des fleurs ensorte qu'il y en ait 3 au premier rang, 5 dans le second, ainsi de suite; combien en faudra-t-il pour 6 rangs?

Ariste. C'est demander la somme d'une progression dont le premier terme est 3, le nombre des termes, 6; la différence, 2.

1°. Je multiplie 2, qui est la

différence, par 5, nombre des termes qui précèdent le dernier 6; & ajoutant le produit 10 au premier terme 3, j'ai 13, valeur du ſixième terme*, & qui jointe à 3, valeur du premier, me donne 16 pour la ſomme des extrêmes. * N. 130.

2°. Je multiplie cette ſomme 16 par 3, moitié du nombre des termes; & j'ai 48, ſomme des termes de la progreſſion*: donc il faudra 48 plantes. * N. 132.

Si l'on veut ranger de même des Soldats en bataille, on trouvera de même combien il faut d'hommes.

Enfin nous avons atteint les proportions géométriques.

EUDOXE. Et ce qu'il y a de plus d'uſage dans les Mathématiques, mérite bien un entretien.

VII. ENTRETIEN.

Sur les Proportions Géométriques.

EUDOXE. EXpliquez-vous librement, Arifte. Je ne vous interromprai point, comme je fis la derniere fois, de peur de perdre le fil des chofes que vous direz fur une matière fi importante.

ARISTE. Quelques principes; quelques propofitions, quelques vérités qui en font les fuites, voilà ce qui s'offre à mon efprit.

134. D'abord les tous font comme leurs parties femblables,
N.99. les moitiés, les tiers, &c. or dans deux raifons égales, les antécédens font les tous, & les conféquens les parties femblables, ou
N.98. au contraire : donc les antécédens font comme les conféquens;

ſi $a.b = c.d$, $a.c = b.d$, ou ſi $a.b :: c.d$, $a.c :: b.d$.

D'ailleurs un produit $b \times c$, ou bc, eſt le multiplié b pris autant de fois que l'unité eſt contenue dans le multiplicateur c *: de-là, comme 1 ou l'unité eſt au multiplicateur, ainſi le multiplié b eſt au produit $b \times c = bc$; & il y a proportion géométrique dans la multiplication *.

*N. 18.

* N. 109.

En un mot;

$1.c :: b.bc.$

Donc $1.b :: c.bc$ *.

* N. 134.

Mais $1.b :: c.cb$, par la déf. du produit, prenant b pour multiplicateur, c pour le multiplié.

Donc $c.bc :: c.cb$ *, deux raiſons égales à une 3e. étant égales entre elles.

* N. 104.

Donc $bc = cb$ *; puiſque deux quantités qui ont même raiſon à une troiſième, ſont égales entre elles.

* N. 106.

Ainſi que l'on multiplie la première grandeur b par la ſeconde c, ou la ſeconde c par la première b, le produit eſt le même.

Aussi $2 \times 1 = 1 \times 2 = 2$. $3 \times 2 = 2 \times 3$ (*a*).

Enfin la proportion géométrique se rencontre dans la Division comme dans la Multiplication : car le caractère du Quotient étant d'exprimer par le nombre d'unités qu'il contient, combien de fois le
*N. 50. Dividende contient le Diviseur *; le Dividende a contient le Diviseur b, comme le Quotient $\frac{a}{b}$ contient l'unité. En un mot, $a.b :: \frac{a}{b}\ 1$.

Cela posé ;

PROPOSITION I.

135. *Dans une proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Si $a.b :: c.d$, je dis que $ad = bc$.

* N. 103. Soit $\frac{a}{b} = x$: donc $\frac{c}{d} = x$*: donc
* N. 105. $bx = a$, & $dx = c$* : donc $bx.b ::$

(*a*) Calcul numérique, N. 20.

$dx.d = a.b :: c.d$. Or $bxd = bdx$ * : * N. 134.
donc $ad = bc$.

Auſſi ſoit $2.4 :: 3.6 : 2 \times 6 = 4 \times 3 = 12$.

136. De-là, 1°. Le produit, $abcd = adbc$, de quatre termes proportionnels $a.b :: c.d$, eſt un quarré : car $ad = bc$ * : donc $adbc = ad \times bc = adad$, eſt le produit d'une grandeur par elle-même. * N. 135.

2°. Dans la proportion continue, le plan ou le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen.

Je dis que dans $\div a.b.c$, $ac = b^2$.

Dans $a.b :: b.c$, $ac = b^2$ * : Or $\div a.b.c = a.b :: b.c$ * ; & par conſéquent la racine quarrée du produit des extrêmes ſera le moyen. * N. 135. * N. 110.

Auſſi, ſoit $\div 2.4.8 : 2 \times 8 = 4 \times 4 = 16$.

137. 3°. Si connoiſſant trois termes $a.b :: c$ d'une proportion, ſçavoir un extrême a, & les deux

moyens, $b :: c$, on divise le produit bc des moyens par l'extrême connu a, l'on aura dans le Quotient, le quatrième terme d, ou le second extrême.

Je dis donc que $\frac{bc}{a} = d$.

* N. 135. $bc = ad$*: or $\frac{ad}{a} = d$**: donc ** N. 50. $\frac{bc}{a} = d$.

Aussi, soit $2.4 :: 3.6 : \frac{4 \times 3 = 12}{2} = 6$ (a).

138. Par la même raison, le produit des extrêmes divisé par un des moyens, donnera l'autre moyen.

139. 4°. Le produit des moyens divisé par le premier extrême, peut être le second extrême.

Je dis que $a.b :: c. \frac{bc}{a} = a.b :: c.d$, parce que $\frac{bc}{a} = d$*. * N. 137.

Ainsi dans la proportion continue $\div a.b.c$, le quarré du moyen

(a) C'est la régle de trois.

divisé par le premier extrême, vaudra lesecond extrême; $\div a.b.c = a.b :: b.c = \div a.b. \frac{b^2}{a}$.

5°. Par conséquent pour trouver une troisième proportionnelle à deux grandeurs a, b, l'on n'a qu'à diviser le quarré b^2 de la seconde, b par la première a; le Quotient $\frac{b^2}{a}$ sera la troisième.

Aussi $\div 2.4.8 = \div 2.4. \frac{4 \times 4 \text{ ou } 16}{2}$.

Si quatre termes sont disposés proportionnellement, que plus donne plus, ou que moins donne moins; que le premier terme soit au second, comme le troisième ou quatrième, c'est proportion ou *régle de trois directe*. Comme 2.4 :: 3.6. ou 6.3 :: 4.2. Si 20 sols produisent 1 sol, 100 sols produiront 5 sols.

Lorsque moins donnant plus, plus donne moins; que le premier terme est au second, comme le

quatrième au troiſième, ou que le quatrième eſt plus petit que le ſecond, à proportion que le troiſième eſt plus grand que le premier, ou au contraire, c'eſt *régle de trois inverſe*. 2 eſt à en raiſon inverſe de 4 à 2. Si 2 hommes demandent 4 jours pour faire un ouvrage, 4 hommes demandent 2 jours.

On réduit la régle inverſe à la directe, en formant chaque raiſon, des grandeurs de même eſpèce. Ainſi au lieu de dire ; ſi 2 hommes demandent 4 jours, combien ? 4 hommes; on dira : 4 mes, 2 hommes : : 4 jours, $x =$ 2 jours.

140. Obſervons enfin que ſi parmi quatre termes, le premier eſt au troiſième, comme le quatrième au ſecond, la proportion eſt *réciproque* ; & que ſi de choſes égales, on ôte choſes égales, les reſtes ſont égaux.

PROP.

PROPOSITION II.

141. *Si quatre quantités ſont diſpoſées de manière que le produit des extrêmes ſoit égal au produit des moyens, elles ſont proportionnelles.*

Soient a, b, c, d.

Si $ad = bc$, je dis que $a.b :: c.d$.

Je ſuppoſe $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$: il ſuffit de prouver que $m = n$ *. * N. 102.

$bm = a$, $dn = c$ * : donc $bdm = ad$, & $bdn = bc$: ainſi puiſque $ad = bc$, $bdm = bdn$. Donc $\frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$ *. * N. 50.

Or $\frac{bdm}{bd} = m$, & $\frac{bdn}{bd} = n$: donc $m = n$.

Auſſi ſoit $2 \times 6 = 4 \times 3$: $2.4 :: 3.6$.

142. De-là 1°. Si deux produits ſont égaux, leurs racines ſont réciproquement proportionnelles, ou la première eſt à la troiſième,

comme la quatrième à la seconde de * : car si $ad = bc$, $a.b :: c.d$.

* N. 140 & 141.

143. 2°. L'antécédent d'une raison est à son conséquent, comme le quarré de l'antécédent au plan de l'antécédent par le conséquent.

* N. 141.

$a.b :: a^2.ab$ * : car $a^2b = a^2b$.

Aussi $2.4 :: 2 \times 2 = 4.\ 2 \times 4 = 8.\ 3.4 :: 3 \times 3 = 9.\ 3 \times 4 = 12$.

144. 3°. Quelque changement qu'on fasse dans la situation des termes, la proportion subsiste, pourvû que les mêmes termes soient moyens ou extrêmes.

Alors le produit des extrêmes ou des moyens est le même; donc, &c. *.

* N. 141.

Si $a.b :: c.d$.

en raison inverse. $b.a :: d.c$. } puisque $ad = bc$.

en raison alterne. $a.c :: b.d$, }

en ajoutant, ou *componendo*. } $a+b.b :: c+d.d$: car $ad+bd = bc+bd$, puisque $bc = ad$.

en retranchant, ou *dividendo*. } $a-b.b :: c-d.d$: car $ad-bd = bc-bd$;

Soit $2.4 :: 3.6$:

$4.2 :: 6.3$

$2.3 :: 4.6$, &c.

145. 4°. Si l'on ajoute aux deux termes d'une raiſon 2 grandeurs proportionnelles, la raiſon ſubſiſte.

Si $a . b :: c . d$, je dis que $a + c . b + d :: a . b$.

Soit $\frac{a}{b} = x$: donc $\frac{c}{d} = x$ * : donc $bx = a$, & $dx = c$ *. * N. 103. * N. 50.

Donc $bx . b :: dx . d = a . b :: c . d$. Or $bx + dx . b + d :: bx . b$, puiſque $b^2x + bdx = b^2x + bdx$: donc $a + c . b + d :: a . b$.

$2 . 4 :: 3 . 6$. Auſſi $2 + 3 = 5 . 4 + 6 = 10 :: 2 . 4$.

Par le même principe, ſi l'on retranche de deux termes d'une raiſon deux quantités proportionnelles, la raiſon ſubſiſte.

146. De-là, dans une proportion géométrique, la ſomme ou la différence des antécédens eſt à la ſomme ou la différence des conſéquens, comme un antécédent à ſon conſéquent, puiſque $a \pm c . b \pm d :: a . b$ *. * N. 145.

147. 5°. Deux produits par même multiplicateur ſont comme les grandeurs multipliées.

* N. 141. $ac \,.\, bc :: a \,.\, b$ * car $abc = abc$.

$3 \times 2 = 6 \,.\, 4 \times 2 = 8 :: 3 \,.\, 4$.

Ainſi les produits de grandeurs égales par grandeurs égales, ſont égaux.

6°. Si l'on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre, le premier par le premier, le ſecond par le ſecond, &c. les produits ſont proportionnels.

Si $a \,.\, b :: c \,.\, d$, & $e \,.\, f :: g \,.\, h$; je dis que $ae \,.\, bf :: cg \,.\, dh$. il ſuffit de prouver que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, ou que $adeh = bcfg$.

* N. 135. Puiſque $a \,.\, b :: c \,.\, d$, & $e \,.\, f :: g \,.\, h$, $ad = bc$, & $eh = fg$ *; donc ad * N. 147. $\times eh = bc \times fg$, ou $adeh = bcfg$ *, les produits des grandeurs égales par grandeurs égales étant égaux.

148. 7°. Si trois grandeurs ſont en proportion continue, la 1[re]. eſt

à la 3[e]. comme le quarré de la 1[re]. au quarré de la seconde.

Si $\div a.b.c$, je dis que $a.c :: a^2.b^2$. Il suffit de prouver que $a^2c = ab^2$*. * N. 141.

Si $\div a.b.c$, $ac = b^2$*: donc $a \times ac$ ou $a^2c = a \times b^2$ ou ab^2*. * N. 136. * N. 147.

$\div 2.4.8$: aussi $2.8 :: 2 \times 2 = 4$. $4 \times 4 = 16$.

149. 8°. Deux Quotiens par même Diviseur sont comme les grandeurs divisées.

Soit $\frac{a}{c} = m$, & $\frac{b}{c} = n$: je dis que $m.n :: a.b$.

$cm = a$, & $cn = b$*: or $m.n :: cm.cn$*, les quantités multipliées par la même étant comme les produits : donc $m.n :: a.b$. *N. 50. * N. 147.

Si l'on divise 4 par 2, & 8 par 2, les Quotiens seront 2, 4 : or $2.4 :: 4.8$.

Ainsi l'on peut multiplier ou diviser deux termes a, b à l'infini, sans que les produits ou les Quo-

tiens changent de rapports.

150. 9°. Si l'on divise une quantité par deux différentes, les Quotiens sont reciproquement comme les Diviseurs.

Soient $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{a}{c} = n$:je dis que $m.n :: c.b$.

*N.50. $mb = a$, & $nc = a$ * : donc
* N. 106. $mb = nc$ * : donc $m.n :: c.b$ **,
** N. 142. les racines étant réciproquement proportionnelles, quand les produits sont égaux.

151. 10°. Enfin, si dans une proportion $a.b :: c.d$, le premier conséquent b est à un terme quelconque f, comme le second conséquent d à un autre terme quelconque g; le premier antécédent a est au premier terme f, comme le second antécédent c au second terme g.

Si $a.b :: c.d$, & $b.f :: d.g$; je dis que $a.f :: c.g$.

En raison alterne, $a.c :: b.d$, &

 * N.
$b.d::f.g$ *: donc $a.c::f.g$ **, 144.
& en raison alterne, $a.f::c.g$. ** N.
De-là, dans deux proportions 104.
qui ont mêmes antécédens, & où le premier antécédent de la première est au premier conséquent de la seconde, comme le second antécédent de la première est au second conséquent de la seconde; le premier conséquent est au premier conséquent, comme le second au second.

Si $a.b::c.d$, & $a.f::c.g$, je dis que $b.f::d.g$.

Si $a.b::c.d$, en raison inverse, $b.a::d.c$ *. Or si $b.a::d.c$, & * N.
$a.f::c.g$; $b.f::d.g$, comme on 144.
vient de le démontrer: donc $b.f::d.g$.

Eudoxe. Je vous ai tenu parole, Ariste; & j'ai été bien payé de mon silence par le plaisir de voir naître d'une vérité, tant de vérités si fécondes en lumières mathématiques. Peut-être ne ferais

je pas si docile au premier jour dans les progressions géométriques, où ce peut être une sorte de jeu de proposer quelques Problêmes.

VIII. ENTRETIEN.

Sur les Progressions Géométriques.

152. *EUDOXE.* HE bien, Ariste, il s'agit donc de progressions, de suites ou de séries géométriques?

ARISTE. C'est-à-dire de proportions géométriques continues de plus de trois termes, comme ∻ 1. 2. 4. 8. 16, &c. = ∻ *a.b.c.d.e* ou ∻ 16. 8. 4. 2. 1 = ∻ *e.d.c.b.a*, dont la première est ascendante; la seconde, descendante. Dans les deux, chaque terme a même raison au suivant*; & il ne faut que

* N. 110.

que retourner l'une pour la changer en l'autre.

EUDOXE. Il ſuit, ce me ſemble, de la définition, qu'une progreſſion ne peut, dans la rigueur, commencer ni finir par zero.

ARISTE. Tout terme de la progreſſion contient ou eſt contenu, puiſque la raiſon qui la compoſe, eſt manière de contenir ou d'être contenu *; or zero ne contient ni n'eſt contenu.

* N. 152.

De-là, ſi l'on veut qu'une progreſſion commence ou finiſſe par zero, l'on regardera zero, comme une grandeur infiniment petite, mais enfin comme une grandeur.

EUDOXE. Il ſuit encore de la définition, que les puiſſances d'une même grandeur ſont une progreſſion.

$\div b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5$, &c. en eſt une: car $\frac{b^5}{b^4} = b$; $\frac{b^4}{b^3} = b$ *, &c.

* N. 50.

donc la même raison y regne ; puisque c'est toujours même exposant. Et par conséquent, les exposans des puissances qui forment une progression géométrique, sont une progression Arithmétique ÷ 1. 2. 3. 4. 5 *.

* N. 118.

Considérons d'abord la progression comme ascendante ; & sans doute vous allez trouver dans la définition même, la démonstration d'un certain nombre de Propositions qui exprimeront les propriétés principales des progressions de cette espèce.

Proposition I.

153. *Dans la progression* ∺ *a. b. c. d. e , le produit du terme qui précède , par l'exposant , est égal au terme qui suit.*

Ariste. L'exposant dit la manière dont le terme précédent est contenu dans le suivant : ainsi le terme précédent est diviseur ; & le suivant dividende : or le pro-

duit du Diviseur par l'exposant est égal au Dividende*; si $\frac{b}{a} = x$, *N. 50. $ax = b$.

PROPOSITION II.

154. *EUDOXE. Le second terme est égal au produit du premier par l'exposant; le troisième au produit du premier par le quarré de l'exposant, le quatrième au produit du premier par le cube, &c.*

ARISTE. Soit a le premier terme; x, l'exposant: donc $a \times x$, ou $ax^1 = b$, le second: donc $ax \times x$ ou $ax^2 = c$, le troisième: donc $ax^2 \times x$, ou $ax^3 = d$, le quatrième, &c *. *N. 153.

Or ax^1 est le produit du premier terme par l'exposant; ax^2, par le quarré; ax^3 par le cube.

155. De-là 1°. $\div a.b.c.d.e. = \div a.\ ax^1.\ ax^2.\ ax^3.\ ax^4.$

$\div 1.2.4.8.16 = \div 1.\ 1 \times 2.\ 1 \times 4.\ 1 \times 8.\ 1 \times 16.$

156. 2°. Le dernier terme eſt égal au produit du premier par l'expoſant élevé à une puiſſance, qui a pour expoſant le nombre même des termes, moins un; puiſque le cinquième terme $e = ax^4$.

157. EUDOXE. Ainſi connoiſſant le premier terme & l'expoſant, vous avez un terme donné.

ARISTE. Je multiplie le premier terme par l'expoſant élevé à la puiſſance qui a pour expoſant le nombre qui exprime le terme donné, moins 1, & le produit eſt le terme donné *.

* N. 156.

EUDOXE. Donnons aux quatre fers d'un cheval 20 cloux, dont le premier s'eſtime 1 denier; le ſecond, 10; le troiſième, 100, ainſi de ſuite: quelle ſera la valeur du dernier clou?

ARISTE. C'eſt une progreſſion de 20 termes, dont le premier eſt 1, l'expoſant 10.

Je dis donc: le vingtième ter-

me = 1 × 10 élevé à sa dixneuvième puissance * ; or la dixneuvième puissance de 10 est 1 suivi de 19 zero : donc 1 suivi de 19 zero exprimera la valeur du vingtième clou. L'univers entier sera-t-il assez riche pour acheter le cheval ?

* N. 156.

EUDOXE. Continuons l'examen de nos Propositions.

PROPOSITION III.

158. *Le produit de deux termes également éloignés des extrêmes, est égal au produit des extrêmes.*

ARISTE. Soit ÷ *a. b. c. d. e* : je dis que $bd = ae$.

a.b : : *d.e* * ; donc $bd = ae$ **.

D'ailleurs, ÷ *a*. ax^1. ax^2. ax^3. ax^4 = : : *a. b. c. d. e* * ; or $a \times ax^4 = ax^1 \times ax^3$.

* N. 152.

** N. 135.

* N. 155.

Soit ÷ 1. 2. 4. 8. 16 : $2 \times 8 = 1 \times 16 = 16$.

PROPOSITION IV.

159. EUDOXE. *Dans la progression, $\div a.b.c.d.e$, le plan de deux termes vaut le quarré d'un troisième moyen entr'eux.*

* N. ARISTE. Je dis que $bd = c^2$.
152. $b.c :: c.d$ * : donc $bd = c^2$ **.
** N. 135. D'ailleurs $b.c.d = \div ax^1.ax^2.$
* N. ax^3 * : or $ax^1 \times ax^3 = ax^2 \times ax^2$.
158. De-là, si le nombre des termes est impair, le quarré de celui du milieu est égal au produit des extrêmes, puisque $bd = c^2$.

Soit $\div 1.2.4.8.16 : 2 \times 8 = 4 \times 4$.

PROPOSITION V.

160. EUDOXE. *Dans la progression, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent à son conséquent.*

ARISTE. C'est une propriété de
* N. la proportion *, & par consé-
146. quent de la progression, qui n'est

qu'une proportion continuée *. * N. 152.

Si $\div a.b.c.d$, je dis que $a+c. b+d :: a.b$.

Il suffit de prouver que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, que $ab+bc = ab+ad$ *, ou que $bc=ad$, comme $ab=ab$: Or si $\div a.b. c.d$, $a.b :: c.d$ * : donc $bc=ad$ **. * N. 141. * N. 152. ** N. 135.

De-là, comme tous les termes, excepté le dernier, sont antécédens ; & tous conséquens, hors le premier, $a+b+c. b+c+d :: a.b$.

PROPOSITION VI.

161. EUDOXE. *Comme le second terme, moins le premier, est au premier ; ainsi le dernier, moins le premier, est à la somme des termes qui précédent le dernier.*

ARISTE. Si $\div a.b.c.d$, je dis que $b-a. a :: d-a. a+b+c$.

$a.b :: a+b+c. b+c+d$ *. * N. 160.

Donc $b.a :: b+c+d. a+b+c$ *. * N. 144.

* N. 144. Donc $b-a.a :: b+c+d-a-b-c.\ a+b+c$ *.

* N. 4. Or $b+c-b-c=0$ *.

Donc $b-a.a :: d-a.\ a+b+c$.

Soit ∺ 1. 2. 4. 8 : $2-1=1$. $1 :: 8-1=7$. $1+2+4=7$.

162. De-là 1°. Si la raiſon double regne dans la progreſſion ∺ *a.b.c.d*, le dernier terme, moins le premier, eſt égal à la ſomme *s* des termes qui précédent le dernier.

Je dis donc que $d-a=s$.

Puiſque la raiſon eſt double, le premier terme étant *a*, le ſecond terme $b=2a$: donc $b-a=2a$

* N. 161. $-a.\ a :: d-a.s$ *. Or $2a-a=a$: donc $d-a=s$.

163. 2°. Si c'eſt la raiſon triple, le dernier terme *d*, moins le premier *a*, ſera double de *s*. $d-a=2s$. car $3a-a.\ a :: d-a.s$ *. Or $3a-a=2a$. * N. 161.

Donc $d-a=2s$.

164. 3°. Par le même princi-

pe, dans la raiſon quadruple, le dernier terme, moins le premier, ſera triple de *s*, &c. & par conſéquent il ſera noncuple, ſi la raiſon décuple regne, ou que le ſecond terme ſoit décuple du premier.

165. J'ai dépenſé un louïs le premier jour; 2, le ſecond, ainſi de ſuite; 16, le dernier: combien ai-je dépenſé?

ARISTE. C'eſt une progreſſion, dont le premier terme eſt 1 louïs; le ſecond, 2; le dernier, 16, & la ſomme des termes qui le précédent, *s*.

Je dis donc: $2 - 1 = 1 . 1 :: 16 - 1 = 15 . s$*. * N. 161.

Donc $1 . 1 :: 15 . s$.

Donc $\frac{1 \times 15}{1} = 15 = s$*. * N. 137.

Enfin j'ajoute cette ſomme $15 = s$ au dernier terme 16:

Et j'ai dans 31 louïs la ſomme de votre dépenſe.

Aussi, 1.2.4.8.16, en sont tous les termes : or 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.

166. *EUDOXE*. Considérons maintenant la progression comme descendante. Supposée infinie, excedera-t-elle un nombre fini ?

ARISTE. Non. Car soit ÷ 16. 8. 4. 2. 1.... 0 = une grandeur infiniment petite ; progression où regne la raison double.

1°. Je la change en ascendante
* N. ÷ 0.... 1. 2. 4. 8. 16*.
152. 2°. Je dis : 16 — 0 vaut la som-
* N. me des termes qui précédent 16*.
162. Or 16 — 0 = 16, somme des termes précédens.

3°. J'ajoute cette somme 16 à 16, dernier terme ; & 32, nombre fini, est la somme de la progression supposée infinie.

Mais le premier terme qu'on appelle zero, est toujours, quoiqu'infiniment petit, une grandeur réelle, qui retranchée du

dernier, le diminue; $16 - 0 < 16$: donc la somme des termes précédens est toujours moindre que ce dernier terme.

167. De-là 1°. Dans la progression où la raison double regne, la somme totale est moindre que le double du dernier terme.

168. 2°. Si la raison est décuple, le dernier terme ne sera guéres que noncuple de la somme des termes précédens *; & si le terme le plus haut est 1, la somme totale sera 1, plus la neuvième partie de 1.

* N. 164.

Ainsi, la dixième partie d'une lieuë, plus la centième, plus la millième, &c. ou des dixièmes de dixièmes à l'infini, loin de faire une distance infinie, selon l'idée de Zenon, ne feront que la neuvième partie d'une lieuë.

Et par conséquent Zenon a beau faire aller la Tortue devant Achille en progression descen-

dante : pour atteindre celle-ci, celui-là n'aura qu'une distance finie à parcourir; & comme un tems fini répond à une distance finie, & que les distances parcourues avec même célérité, en tems égaux, sont évidemment égales; Achille atteindra la Tortue.

Eudoxe. Mais supposons que Achille = A, fait dix fois autant de chemin que la Tortue = T, qui a une lieuë d'avance : me direz-vous une distance fixe où A aura surement atteint T?

Ariste. Tandis que T fera $\frac{1}{9}$ de la seconde lieuë, Achille qui va 10 fois plus vite, fera $\frac{10}{9}$ de lieuës, qui sont une lieuë & $\frac{1}{9}$.

Eudoxe. Ainsi Achille doit avoir atteint la Tortue après 1 lieuë, plus 1 neuvième.

169. Mais, Ariste, à propos de progression, quelle idée vous êtes-vous faite de ce qu'on appelle progression harmonique?

ARISTE. C'eſt une ſuite de grandeurs telles, que ſi l'on en prend 3 qui ſe ſuivent immédiatement, la plus grande ſoit à la plus petite géométriquement, comme l'excès de la plus grande ſur la moyenne eſt à l'excès de la moyenne ſur la plus petite ; telle eſt 30. 20. 15, 12. 10 : car 30 eſt à 15 comme 10, excès de 30 ſur 20, eſt à 5, excès de 20 ſur 15, & 15 eſt à 10, comme 3, excès de 15 ſur 12, eſt à 2, excès de 12 ſur 10 : en un mot ; 30. 15 :: 10. 5, & 15. 10 :: 3. 2, &c.

Enfin, les raiſons compoſées répandront quelque jour, ce ſemble, dans les progreſſions mêmes.

EUDOXE. Mais le tems nous invite à la promenade ; & l'eſprit délaſſé ſaiſira mieux, & avec plus de plaiſir, des vérités qui pour être évidentes, ne laiſſent pas de demander de l'attention.

IX. ENTRETIEN.

Sur les Raisons composées.

EUDOXE. VOus allez-donc, Ariste, nous faire l'analyse des Raisons composées. C'est une sorte d'Anatomie assez délicate.

ARISTE. J'essayerai de la faire allant pas à pas.

EUDOXE. Et moi, de vous suivre en silence.

170. ARISTE. En général, *raison composée* est une raison qui résulte d'autres raisons, qu'on nomme *raisons composantes*. Est-elle composée de deux raisons égales ? C'est *raison doublée* ; de trois ? *raison triplée* ; de quatre ? *quadruplée*, &c.

171. Enfin l'exposant d'une raison en est l'expression * : ainsi l'on

* N. 100.

peut le prendre pour la raiſon même.

172. Cela poſé, 1°. *Quand trois termes ſe ſuivent, que le premier eſt plus petit que le ſecond, & le ſecond que le troiſième; le produit des expoſans de la raiſon du premier au ſecond, & de la raiſon du ſecond au troiſième, eſt l'expoſant de la raiſon du premier au troiſième.*

Soient les termes a, b, c; $\frac{b}{a} = m$, $\frac{c}{b} = n$: je dis que $\frac{c}{a} = mn$.

$am = b$*, & par conſéquent $amn = bn = c$: donc $\frac{amn}{a} = \frac{c}{a}$: or $\frac{amn}{a} = mn$*: donc $\frac{c}{a} = mn$. *N. 105. *N. 50.

Par le même principe, le produit des expoſans de trois raiſons intermédiaires, ſera l'expoſant de la raiſon du premier au quatrième.

173. 2°. Le produit mn des expoſans m & n de deux raiſons,

étant compoſé des expoſans de ces raiſons, la troiſième raiſon dont ce produit *mn* eſt expoſant, eſt compoſée des deux premières.

Les expoſans ſe prennent pour * N. 171. les raiſons * : donc l'expoſant de la troiſième étant compoſé des expoſans des deux premières, celle-là l'eſt de celles-ci.

174. De-là, dans trois termes *a*, *b*, *c*, la raiſon du premier au troiſième, ſera compoſée de celles du premier au ſecond, & du ſecond au troiſième; la raiſon du premier au quatrième ſera compoſée des trois intermédiaires.

175. Dans une progreſſion géométrique ∺ *a*. *b*. *c*. *d*. *e*, où la même * N. 152. raiſon regne *, la raiſon du premier terme au troiſième ſera doublée; du premier au quatrième, triplée; du premier au cin- * N. 171. quième, quadruplée *, puiſqu'elle ſera compoſée de deux, de trois, ou

ou de quatre raiſons égales.

Si l'expoſant de la progreſſion eſt n, la raiſon du premier terme au troiſième aura pour expoſant n^2; du premier au quatrième, n^3; du premier au cinquième, n^4, &c.

Auſſi, ſoit $\div$ 2. 4. 8. 16. 32 : $\frac{8}{2} = 4 = 2 \times 2$; $\frac{16}{2} = 8 = 2 \times 2 \times 2$, &c.

176. 3°. *Deux raiſons données avec leurs expoſans, la raiſon du produit des antécédens & du produit des conſéquens, eſt égal au produit des expoſans.*

Soient $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$: je dis que $\frac{ac}{bd} = mn$.

$a = bm$, & $c = dn$*. * N. 105.

Donc $ac = bdmn$*. * N. 147.

Donc $\frac{ac}{bd} = \frac{bdmn}{bd}$: or $\frac{bdmn}{bd} = mn$* : donc $\frac{ac}{bd} = mn$. * N. 50.

Mais mn eſt l'expreſſion d'une raiſon compoſée* : donc $\frac{ac}{bd}$ eſt * N. 173.

une raiſon compoſée.

177. 4°. *Si l'on multiplie les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens; les produits ſont en raiſon compoſée des raiſons qui les donnent:* puiſque $\frac{ac}{bd}$ eſt en raiſon compoſée de $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ *.

* N. 176.

Si les raiſons compoſantes ſont égales, la raiſon compoſée ſera doublée *.

* N. 170.

Soient 2. 3 & 5. 8, ou $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{8}$: $\frac{2\times5=10}{3\times8=24}$ ſera une raiſon compoſée des raiſons de 2 à 3 & de 5 à 8.

Soient 2. 3 : : 4. 6 : $\frac{2\times3=6}{4\times6=24}$, ſera une raiſon doublée de celles de 2 à 4, & de 3 à 6.

178. De-là, faut-il trouver la raiſon compoſée de pluſieurs raiſons données? Je multiplie les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſé-

quens ; & la raiſon des produits eſt la raiſon compoſée *. * N.

179. 5°. *Les plans ſont en raiſon compoſée de celles de leurs racines.* 177.

Soient les racines $a. b$ & $c. d$; les plans ac, & bd.

Or ac & bd étant les produits des antécédens & des conſéquens, ſont en raiſon compoſée de $a. b$ & $c. d$*. * N.

180. 6°. *Les quarrés a^2 & b^2 ſont en raiſon doublée de celles de leurs racines $a. b = a. b$.* 177.

La raiſon de a^2 à b^2, ou $\frac{a^2}{b^2}$ eſt compoſée de deux raiſons égales $a. b :: a. b$* : donc elle eſt doublée*. * N. 177. * N.

$\frac{2 \times 2 = 4}{4 \times 4 = 16}$ eſt doublée de $2. 4 :: 2. 4$. 170.

181. 7° *Les ſolides ace & bdf*, *ſont en raiſon compoſée de celles de leurs trois racines $a. b$, $c. d$, $e. f$.* *N. 19.

ace eſt le produit des antécé-

dens ; *bdf*, des conséquens : donc
* N. &c *.
177. *N.19. 182. 8°. *Les cubes* a^3 *&* b^3 *, *sont en raison triplée.*

Ils sont en raison composée de trois raisons égales $a.b = a.b =$
* N. $a.b$ *. Donc. &c.

170. 183. Ainsi l'on peut dire, & l'on dit, qu'une raison est doublée ou triplée, &c. d'une telle raison, par exemple, que la raison de b^2 à c^2 est doublée, & la raison de b^3 à c^3, triplée de celle de b à c ; parce qu'en prenant deux fois ou trois fois une telle raison, comme celle de b à c, on a dans la raison du produit des antécédens & du produit des conséquens, la raison doublée ou triplée, &c. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, $\frac{ac}{bd}$ est une raison doublée de $\frac{a}{b}$; $\frac{ace}{bdf}$, une raison triplée de $\frac{a}{b}$.

Une raison dont une autre est

doublée ou triplée, est soudoublée ou soutriplée de cette autre; $\frac{a}{b}$ est soudoublée de $\frac{ac}{bd}$, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, &c.

184. 9°. *Les produits des termes correspondans de deux progressions sont une progression.*

Si $\div a.b.c.d$, & $\div e.f.g.h$; $\div ae.bf.cg.dh$; ou $\frac{ae}{bf} = \frac{bf}{cg} = \frac{cg}{dh}$*; puisque chacune est composée de même nombre de raisons égales aux raisons qui composent les autres. * N. 152.

185. 10°. *Quand les racines sont proportionnelles, leurs puissances le sont.*

Si $a.b :: c.d$, je dis que $a^2.b^2 :: c^2.d^2$.

$a^2.b^2$ est doublée de $a.b$; & $c^2.d^2$, de $c.d$*; or les raisons composantes étant égales, les composées le sont. * N. 180 & 182.

D'ailleurs, si $a.b :: c.d$, ad

* N. $= bc$* ; ainsi $a^n d^n = b^n c^n$, ou $\overline{ad}^n$
135. $= \overline{bc}^n$: car les produits de gran-
deurs égales par même multipli-
* N. cateur sont égaux * : donc $a^n. b^n :: $
147. * N. $c^n. d^n$ *.
141. Ainsi les puissances d'une pro-
* N. gression qui n'est qu'une propor-
152. tion continuée *, sont en progres-
sion.

Si $\div a. b. c. d$, &c. $\div a^n. b^n. c^n. d^n$, &c.

Soit $\div 1. 2. 4. 8 : \div 1. 4. 16. 64 = \div 1 \times 1. 2 \times 2. 4 \times 4. 8 \times 8.$

186. 11°. *Quand les puissances sont proportionnelles, les racines le sont.*

Si $a^2. b^2 :: c^2. d^2$, $a. b :: c. d$, parce que les raisons composées étant égales, les composantes le sont.

D'ailleurs, si $a^n. b^n :: c^n. d^n$; $a^n d^n$
*N. 22. $= b^n c^n$, ou $\overline{ad}^n = \overline{bc}^n$ *: donc en
* N. divisant les deux produits par n,
149. * N. on aura $ad = bc$ *: or si $ad = bc$,
141. $a. b :: c. d$ *: donc si $a^n. b^n :: c^n. d^n$,
$a. b :: c. d.$

Et par conséquent, si $a.b :: c.d$, $\sqrt[n]{a}.\ \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c}.\ \sqrt[n]{d}$.

Ainsi les racines sont en progression, si les puissances le sont.

Si ∺ $a^n.\ b^n.\ c^n.\ d^n$, &c. ∺ $a.\ b.\ c.\ d$, &c.

Soit ∺ 1. 4. 16. 64 : ∺ 1. 2. 4. 8 = ∺ $\sqrt{1}.\ \sqrt{4}.\ \sqrt{16}.\ \sqrt{64}$.

187. 12°. *Dans une progression, le cube de la première grandeur est à celui de la seconde, comme la première à la quatrième.*

Si ∺ $a.\ b.\ c.\ d$, je dis que $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{d}$, ou que $a^3.\ b^3 :: a.\ d$; $\frac{a^3}{b^3}$ est triplée de $\frac{a}{b}$ *: $\frac{a}{d}$ étant composée de $\frac{a}{b}$, de $\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$, & de $\frac{c}{d} = \frac{b}{c}$ *, est triplée de $\frac{a}{b}$ **: donc $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{d}$.

* N. 182.
* N. 175.
** N. 183.

Soit ∺ 1. 2. 4. 8 : $1 \times 1 \times 1 = 1$. $2 \times 2 \times 2 = 8$ :: 1. 8.

Ainsi la troisième puissance du

premier terme eſt à la troiſième du ſecond, comme le premier à celui qui ſuit le troiſième.

Par la même raiſon, la quatrième puiſſance du premier eſt à la quatrième du ſecond, comme le premier à celui qui ſuit le quatrième, &c.

188. EUDOXE. Et ces principes vont vous donner apparemment le ſecret de trouver deux moyens proportionnels entre 2 termes connus.

ARISTE. 1°. J'appelle les deux moyens inconnus *m* & *n*, que je place entre les deux termes connus; & c'eſt une progreſſion de quatre termes.

2°. Je dis: comme le premier terme eſt au quatrième; ainſi le cube du premier, que je connois, eſt au cube du ſecond *m*, que l'extraction de la racine me donne *; & c'eſt le premier moyen.

* N. 187.

3°. Connoiſſant le ſecond terme

me & le quatrième, j'ai le troisième dans la racine quarrée du second par le quatrième *; & c'est le second moyen. * N. 136.

Faut-il trouver deux moyens proportionnels m & n, entre 2 & 16?

1°. Ayant la progression ∺ 2.m.n.16, je dis : 2.16 : : 2×2×2=8.m^3.

Or, $\frac{16 \times 8}{2}$ = ... 64 dont la racine cubique est 4 : donc $m=4$, premier moyen.

2°. Je dis $4 \times 16 = 64$ dont la racine quarrée est 8 : donc $n=8$, second moyen.

Donc 4 & 8 sont les deux moyens entre 2 & 16.

Aussi ∺ 2. 4. 8. 16.

Les mêmes principes donneront trois, quatre, &c. moyens proportionnels.

189. *Eudoxe*. Mais je ne sçai si vous vous êtes assez expliqué sur le secret de trouver la raison

doublée, ou triplée, &c.

Ariste. Hé bien, 1°. Une ligne de 2 pieds étant à une ligne de 4, comme 2 à 4, la raiſon de cette 1re. ligne à cette 2e. ligne s'exprime en nombres; & la raiſon exprimée en nombres eſt une raiſon *de nombre à nombre.*

2°. Les deux plus petits nombres qui ſont entr'eux comme deux plus grands, ſont expoſans d'une raiſon de nombre à nombre

* N. 101. *. Ainſi, 1 & 2 ſont expoſans de la raiſon de 2 à 4; 1. 2 :: 2. 4.

3°. Deux raiſons égales ont mêmes expoſans *. De-là, puiſque

* N. 103. les raiſons de cette proportion 2. 4 :: 3. 6 ſont égales, les expoſans feront les termes de cette ſorte de proportion 1. 2 :: 1. 2.

4°. Les raiſons des expoſans d'une proportion ſont comme les raiſons égales dont ils ſont expoſans; & les raiſons compoſées, comme les compoſantes: par con-

ſéquent le produit des antécédens & le produit des conſéquens des expoſans ſont comme le produit des antécédens & le produit des conſéquens des raiſons égales dont ils ſont expoſans *. Ainſi le produit des antécédens & le produit des conſéquens de deux raiſons égales, ont pour expoſans les produits des expoſans des deux raiſons égales. * N. 177.

Or ces expoſans étant mêmes antécédens, & mêmes conſéquens, le produit de ceux-là, & le produit de ceux-ci ſont nombres quarrés *, & la raiſon du produit des antécédens & du produit des conſéquens des raiſons égales eſt raiſon doublée *. Donc la raiſon doublée de deux raiſons de nombre à nombre a pour expoſans des nombres quarrés. * N. 19. * N. 177.

Auſſi la raiſon doublée de 2. 4 :: 3. 6 eſt 6. 24 *; & les expoſans de 6. 24 ſont 1. 4; puiſque 1. 4 :: * N. 177.

6.24 : or 1 & 4 sont nombres quarrés, $1 \times 1 = 1$, & $2 \times 2 = 4$.

Enfin, comme la raison doublée de deux raisons égales, ou de la même prise deux fois, est la même chose ; on dit simplement que la raison doublée d'une raison de nombre à nombre, a pour exposans des nombres quarrés, ou que les produits de deux raisons égales sont comme les quarrés des exposans. Par le même principe, la raison triplée a pour exposans des nombres cubes, & les produits de trois raisons égales sont comme les cubes de leurs exposans.

Soient 2.4 : : 3.6 : : 8.16 = 1.
* N. 2 : : 1.2 : : 1.2 * : les produits des
103. exposans sont 1 & 8 : or 1 & 8 sont
* N.19. nombres cubes *, $1 = 1 \times 1 \times 1$, & $8 = 2 \times 2 \times 2$.

190. EUDOXE. On peut voir dans votre principe votre manière de prendre la raison doublée ou triplée.

ARISTE. J'ai celle-là dans les quarrés des expoſans ; celle-ci dans les cubes.

Pour trouver la raiſon doublée de 2.4 :: 3.6, je multiplie l'antécédent des expoſans 1.2 :: 1.2 par l'antécédent ; le conſéquent par le conſéquent ; & j'ai la raiſon doublée, dans la raiſon des quarrés 1. & 4.

Pour trouver la raiſon triplée de 2.4 :: 3.6 :: 8.16, je multiplie de même les antécédens & les conſéquens des expoſans 1.2 :: 1.2 :: 1.2, & j'ai la raiſon triplée dans la raiſon descubes 1. 8.

191. Enfin, ſi dans deux rangs de grandeurs, *la raiſon ordonnée* regne, c'eſt-à-dire ; ſi la première du premier rang eſt à la ſeconde, comme la première du 2e. rang à la ſeconde ; & que la ſeconde du premier rang ſoit à la troiſième, comme la ſeconde du ſecond rang à la troiſième ; la pre-

mière du premier eſt à la troiſième, comme la première du ſecond à la troiſième.

Soient *a*, *b*, *c* & *d*, *e*, *f*: ſi *a*. *b* : : *d*. *e*, & *b*. *c* : : *e*. *f*; je dis que *a*. *c* : : *d*. *f*.

Ces deux raiſons ſont compo-
* N. 174. ſées * de raiſons égales, par la ſuppoſition; donc elles ſont égales.

De-là, ſi dans les deux rangs de grandeurs, *la raiſon troublée*, regne, c'eſt-à-dire ſi la première & la ſeconde du premier ſont comme la ſeconde & la troiſième du ſecond, & que la ſeconde & la troiſième du premier ſoient comme la première & la ſeconde du ſecond; en un mot, ſi *a*. *b* : : *e*. *f*, & *b*. *c* : : *d*. *e*, je dis encore que *a*. *c* : : *d*. *f*, ces deux raiſons étant encore compoſées chacune, de deux raiſons égales.

Me trompe-je, Eudoxe? après tant de réflexions ſur les proportions, les progreſſions, les rai-

ſons compoſées ; les fractions, ce ſemble, à leur tour, n'auroient rien de trop embarraſſé.

Eudoxe. Vous avez dit beaucoup de choſes, qui pourront y répandre du jour. Vous en avez dit ſur leſquelles elles euſſent pû en répandre. Quoiqu'il en ſoit, la matière eſt épineuſe ; avant que de la traiter, donnons nous le loiſir de nous rappeller nos idées ; & nous en aurons plus de plaiſir, vous à parler, moi à vous écouter.

X. ENTRETIEN.

Sur les Fractions.

Ariste. VOus voulez donc, Eudoxe, que je vous débite mon ſyſtême des fractions.

Eudoxe. Et ſans perdre de temps.

ARISTE. Quelques fractions numériques mêlées avec des fractions algébriques ferviront à déveloper mes idées.

192. J'appelle d'abord unité ce qui fe confidére comme féparé de toute autre chofe. L'unité divifible, ou qui contient des parties eft un *entier*.

Fraction, comme $\frac{2}{4} = \frac{a}{b}$, eft une expreffion formée de deux quantités mifes l'une fur l'autre, dont celle de deffous, qu'on nomme *dénominateur*, dit les parties de l'unité ou de l'entier; & celle de deffus, qui eft le *numérateur*, dit un certain nombre de ces parties, ou de parties femblables.

Ainfi, $\frac{1}{2}$ exprime une moitié de l'entier; $\frac{1}{3}$, un tiers; $\frac{1}{4}$, un quart; $\frac{1}{5}$, une cinquième partie, &c.

193. Dans une fraction $\frac{a}{b}$, le numérateur eft au dénominateur, comme la fraction à l'unité. $a . b ::$

$\frac{a}{b}$. 1 : car $a . b :: \frac{a}{b} . \frac{b}{b}$ *, les Quo- * N.
tiens $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{b}$ étant comme les quan- 149.
tités a & b, divisées par même
Diviseur b. Or $\frac{b}{b} = 1$ * : donc a. *N. 54.
$b :: \frac{a}{b} . 1$; & par conséquent $\frac{a}{b} . 1 .$
$a . b$ *. * N.

194. De-là, 1°. La fraction $\frac{a}{b}$ 144.
est le Quotient du numérateur a
par le dénominateur b, puisqu'elle est à l'unité, comme le Dividende au Diviseur $\frac{a}{b}$ $1 :: a . b$ *, * N.
ce qui est le caractère du Quo- 193.
tient *. * N.

195. 2°. Le produit de la frac- 134.
tion $\frac{a}{b}$ multipliée par le dénominateur b, est égal au numérateur a, car $\frac{a}{b} \times b$, produit des extrêmes $= 1 \times a = a$, produit des moyens *. * N.

196. 3°. Divisez a par b : le 135.

*N.50. Quotient $\frac{a}{b} \times b = a$ * : ainsi divi-
*N.92. sion ou rapport géométrique * ou fraction, c'est même chose, puis qu'ils ont même propriété.

En effet, soit la Division $\frac{6}{2}$: l'exposant est 3 ; car 2 est trois fois dans 6 : le rapport $\frac{6}{2}$ a pour exposant 3 : car 6 contient trois fois 2. La fraction $\frac{6}{2}$ a pour exposant 3 : car 6 parties telles qu'un entier en comprend 2, valent trois entiers. Et par conséquent la Division $\frac{6}{2} = 3$; le rapport $\frac{6}{2} = 3$; la fraction $\frac{6}{2} = 3$; or $3 = 3 = 3$.

De-là, les deux plus petits termes qui seront entr'eux, comme les termes de la fraction, en seront les exposans *.
* N. 101.

197. Si la grandeur littérale a un Diviseur dessous, c'est une fraction littérale, comme $\frac{ac}{d}$ ou $\frac{a^2+2ab+b^2}{d}$; sinon, c'est une grandeur littérale entière, comme *ac*

ou $a^2 + 2ab + b^2$.

198. Un *nombre entier* contient l'unité un certain nombre de fois éxactement, comme 4. Ainsi, l'on peut le diviser éxactement, ou par lui-même, ou par l'unité; puisque le produit de ce nombre par l'unité, ou de l'unité par ce nombre est égal au nombre même. $\frac{4}{4} = 1$; & $\frac{4}{1} = 4$*: $4 \times 1 = 4$ *N. 50.
$= 1 \times 4$.

Il y a des nombres qui n'ont qu'eux-mêmes, ou l'unité pour Diviseurs éxacts, comme 3, 5, 7; & les nombres de cette espèce sont *nombres premiers*.

Il y a des nombres qui ont plusieurs Diviseurs éxacts; 50 a 25, 10, 5, 1; & 25 a, comme 50, 5 & 1. Les nombres qui divisent éxactement plusieurs quantités, sont *Diviseurs communs*; tels sont 5 & 1.

Tous les nombres entiers ayant l'unité pour Diviseur commun,

ou pour commune meſure, ſont *commenſurables*. Si deux quantités n'ont point de Diviſeur commun, ou de commune meſure, elles ſont *incommenſurables* entre elles.

Eſſayez tous les Diviſeurs de deux nombres, diviſant chacun par 2, par 3, &c : voyez ceux qui ſont Diviſeurs communs : & les plus grands parmi les communs, ſont les plus *grands Diviſeurs communs*.

199. Faut-il trouver le plus grand Diviſeur commun de deux quantités inégales ?

1°. Si la plus petite quantité diviſe éxactement la plus grande, la plus petite eſt le plus grand Diviſeur commun, puiſqu'elle ne peut être diviſée éxactement par un plus grand Diviſeur qu'elle. Soit $\frac{4}{2}$: 2 eſt Diviſeur de 4 & de 2, puiſque $\frac{4}{2} = 2$, & $\frac{2}{2} = 1$; & 2 eſt le plus grand Diviſeur commun ; car 2 n'a pas de plus grand Di-

viſeur éxact que 2.

2°. Si la Diviſion laiſſe un reſte, on diviſera le premier Diviſeur par le reſte; & ce reſte par le reſte, juſqu'à ce que la Diviſion donne un Quotient ſans reſte; & le Diviſeur de la Diviſion ſans reſte, ſera le plus grand commun Diviſeur.

Cherchons celui de 255 & de 80....

Je dis: $\frac{255}{80} = 3$; reſte 15: $\frac{80}{15} = 5$; reſte 5: $\frac{15}{5} = 3$ ſans reſte: donc 5 eſt le Diviſeur qu'il falloit trouver.

Auſſi, ni 6 ni 7 &c. ne diviſeront éxactement ces deux quantités.

Si la même lettre ſe rencontre dans les deux termes de la fraction algébrique, c'eſt un commun Diviſeur, comme a dans $\frac{ab}{ac}$.

200. Il eſt clair que les plus grands Diviſeurs étant contenus

moins de fois dans le Dividende, donnent les plus petits Quotiens; $\frac{16}{16} = 1$. $\frac{16}{8} = 2$. $\frac{16}{4} = 4$. $\frac{16}{2} = 8$.

201. Divisez le numérateur & le dénominateur par un Diviseur commun : & le 1r. Quotient mis sur le second donne une fraction, qui est la première réduite en ter-
* N. mes plus simples *: car les Quo-
149. tiens par même Diviseur sont comme les grandeurs divisées. Divisez $\frac{16}{8}$ par 2 : & $\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ sera la fraction $\frac{16}{8}$ réduite en plus petits termes.

202. Si les deux termes d'une fraction se divisent éxactement par le plus petit, elle se trouvera réduite à sa plus simple expression ; car le plus petit terme sera
* N. le plus grand Diviseur commun *,
199. & le plus grand Diviseur donne
* N. les plus petits Quotiens *. Divisez
200. $\frac{12}{4}$ par 4: & $\frac{3}{1}$ sera $\frac{12}{4}$ réduite aux termes les plus simples, ou l'ex-

posant de $\frac{1^2}{4}$. Divisez $\frac{ab}{ac}$ par a: $\frac{b}{c}$ sera la réduction ou l'exposant ; & par conséquent, si l'on ôte de la fraction les lettres communes, la fraction sera réduite. Ainsi $\frac{1a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$: car $\frac{1a^3}{a^5}$ divisée par $a^3 = \frac{1}{a^2}$.

203. Multipliez les deux termes d'une première fraction par le dénominateur d'une seconde, & les deux termes de la seconde par le dénominateur de la première, mettant le produit du numérateur par le dénominateur, dessus, & le produit du dénominateur par le dénominateur, dessous : les produits feront deux fractions égales aux premières réduites au même dénominateur ; 1°. Egales aux premières *, puisque les produits par même multiplicateur sont comme les grandeurs multipliées. 2°. Réduites au même dé- * N. 147.

nominateur, parce qu'il sera produit par la multiplication des mêmes racines.

Soient $\frac{5}{2}$ & $\frac{3}{4}$: $\frac{5}{2} \times 4 = \frac{20}{8}$, & $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{8}$:

Donc $\frac{20}{8}$ & $\frac{6}{8}$ ou $\frac{20+6}{8}$ sont $\frac{5}{2}$ & $\frac{3}{4}$ réduites en même dénomination. Ainsi, pour réduire $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ en même dénomination, je multiplie d'abord $\frac{a}{b}$ par d, puis $\frac{c}{d}$ par b; & j'ai $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ou $\frac{ad+bc}{bd}$, dont bd est le dénominateur commun.

Faut-il réduire trois fractions $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$? On peut réduire d'abord les deux premières $\frac{5}{6}$ & $\frac{7}{8}$; & l'on aura.... $\frac{40+42}{48}$; ensuite, on réduira de même celles-ci avec la troisième $\frac{8}{9}$, multipliant les deux premières

premières par 9, & la troisième par 48; l'on aura... $\frac{360+378+384}{432}$.

Ainsi, pour réduire $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, 1°. Je multiplie $\frac{a}{b}$ par d & $\frac{c}{d}$ par b; & j'ai $\frac{ad+bc}{bd}$. 2°. Je multiplie successivement ces deux nouvelles fractions par le dénominateur f de la troisième, & j'ai $\frac{adf+bcf}{bdf}$. Enfin, je multiplie la troisième $\frac{e}{f}$ par le dénominateur commun bd de la première & de la seconde; & j'ai trois fractions de même dénomination $\frac{adf, bcf, bde}{bdf} = \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$.

204. Où l'on peut voir, qu'on réduit plusieurs fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par

le produit des dénominateurs des autres.

205. Maintenant, si l'on divise une quantité par l'unité, le Quotient est égal au Dividende; $\frac{4}{1}=4$,
*N.50. $\frac{a}{1}=a$ *: ainsi, une quantité mise sur l'unité devient fractionnaire sans changer de valeur. Et si l'on ajoute aux deux termes de la fraction même nombre de zero ou de parties décimales, la même va-
* N. 147. leur subsiste encore: $\frac{400000}{100000}=\frac{4}{1}$ * les produits par même multiplicateur étant comme les quantités multipliées.

206. Cela posé, pour réduire un entier & une fraction en même dénomination, par exemple 4, $\frac{3}{2}$, 1°. Je réduis l'entier en
* N. 205. fraction *, & j'ai $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$. 2°. Je multiplie les fractions par les dénomi-
* N. 203. nateurs *; & j'ai $\frac{8+3}{2}$.

Pour réduire $a, \frac{b}{c}$, on peut écrire d'abord $\frac{a}{1}, \frac{b}{c}$; puis, $\frac{ac+b}{c\ ,\ c} = \frac{ac+b}{c}$, ou simplement $\frac{ac+b}{c}$.

Multipliez l'entier 4 par le dénominateur 2 de la fraction : & mettant le produit 8 sur le dénominateur 2, vous avez la même chose, c'est-à-dire $\frac{8}{2}$ & $\frac{3}{2}$, ou $\frac{8+3}{2}$.

Ainsi, pour réduire $a, \frac{ab}{b}$, on peut écrire d'abord $\frac{ab}{b} , \frac{+ab}{b}$ ou $\frac{ab+ab}{b} = \frac{2ab}{b}$ *. * N. 8.

207. *EUDOXE*. Mais, s'il faut réduire la fraction en entiers...

ARISTE. Comme le dénominateur vaut un entier, & que le numérateur n'est que l'expression d'un nombre de parties telles que sont celles du dénominateur *, je * N. divise le numérateur par le déno- 192. minateur : & le Quotient exprime

un nombre d'entiers.

Soit $\frac{16}{4}$: je diviſe 16 par 4, le Quotient eſt 4, qui dit que la fraction vaut 4 entiers. Soit $\frac{ab}{b}$: diviſez ab par b : le Quotient eſt a*, qui dit que $\frac{ab}{b} = a = 1a$, ou un entier.

*N.50.

Si la fraction contient un certain nombre d'entiers avec quelque excès, l'excès mis ſur le Diviſeur après le Quotient fait une nouvelle fraction. Ainſi $\frac{13}{4} = 3$, $\frac{1}{4}$, qui dit que 13 diviſé par 4, ou que la fraction $\frac{13}{4}$ vaut trois entiers & un quart.

208. Enfin, comme une fraction exprime les parties d'un entier ou de l'unité ; une fraction de fraction exprime les parties d'une fraction. $\frac{1}{2}$ d'écu eſt une fraction ; $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, fraction de fraction ; $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, fraction de fraction de fraction.

EUDOXE. S'il faut réduire une fraction de cette espèce à une fraction égale qui exprime des parties de l'unité.....

ARISTE. Je fais une fraction nouvelle qui ait pour numérateur le produit des numérateurs des deux premières, ou des trois premières, & pour dénominateur le produit des dénominateurs.

Il est évident que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; & que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$: or $\frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$; $\frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$.

De-là, la fraction ou le nombre rompu, est mesure de l'unité, comme l'unité du nombre entier.

EUDOXE. Je vois bien Ariste, qu'additionner, soustraire, multiplier, diviser des fractions, ne sera qu'un jeu pour vous.

ARISTE. Vous voulez quelques Problêmes.

PROBLÉME I.

209. *Additionner des fractions.*

1°. Pour additionner deux fractions, je les réduis au même dénominateur * ; & la somme des numérateurs mise sur le dénominateur commun donne une fraction, qui exprime la somme totale, & qu'on peut réduire en entiers *, & à sa plus simple expression *.

* N. 203.
* N. 207.
* N. 196 & 202.

Ainsi, pour ajouter $\frac{5}{6}$ & $\frac{3}{4}$, je dis : $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{20+18}{24} = \frac{38}{24} = 1$, $\frac{14}{24} = 1$, $\frac{7}{12}$.

Quand on ajoute $\frac{1}{3}$ d'écu ou 20 s. avec $\frac{1}{3}$ on ne cherche & on n'exprime que la somme des numérateurs, qui est $\frac{1+1}{3} = \frac{2}{3} = 40$ sol.

2°. Pour additionner un entier & une fraction, je réduis l'entier en une fraction, qui ait même dénominateur que la fraction *, &

* N. 203.

la somme des numérateurs mise sur le dénominateur commun est la somme totale.

Ainsi, 3, $\frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$.

3°. Pour additionner plusieurs entiers & plusieurs fractions, j'ajoute d'abord les fractions, retenant les entiers, si elles en donnent, pour le rang des entiers; puis j'ajoute les entiers avec les entiers.

Ainsi, $4 + 6 + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = 4 + 6 + \frac{12+24}{32} = 1, + \frac{4}{32}$.

De-là, pour additionner $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, je les réduis en même dénomination; & j'ai $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ ou $\frac{ad \,\&\, bc}{bd}$, ensuite j'ajoute les numérateurs*, mettant la somme sur le dénominateur commun bd; & j'ai $\frac{ad+bc}{bd}$. *N. II.

Pour ajouter $\frac{ab^5}{a^3 - ab^2}$ avec $\frac{ab^2}{a-b}$,

*N. 10. on peut écrire $\frac{ab^5}{a^3 - ab^2} + \frac{ab^2}{a-b}$ *.

PROBLÊME II.

210. *Soustraire des fractions.*

Je les réduis en même dénomination *; puis ôtant le numérateur du numérateur, je mets la différence sur le dénominateur commun *.

* N. 203.

* N. 12.

Pour soustraire $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b}$.

1°. Je les réduis; & j'ai $\frac{bc \ \& \ ad}{bd}$.

2°. Je retranche *bc* de *ad*; & j'ai $ad - bc$.

3°. Je mets la différence $ad - bc$ sur le dénominateur commun *bd*; & le reste total est $\frac{ad - bc}{bd}$.

Pour soustraire un entier & une fraction d'un entier & d'une fraction;

tion, je réduis d'abord chaque entier au dénominateur de sa fraction; puis les nouvelles fractions, au même dénominateur *.

Faut-il soustraire $a - \frac{bc}{d}$ de $2e + \frac{f^2}{g}$? *N. 203.

1°. Je réduis les entiers: vient $\frac{ad - bc}{d}$ & $\frac{2eg + f^2}{g}$.

2°. Je réduis les nouvelles fractions: vient $\frac{adg - bcg \ \& \ 2deg + df^2}{dg}$.

Enfin, je retranche la 1re. de la 2e. vient $\frac{2deg + df^2 - adg + bcg}{dg}$ *. *N. 12.

Ainsi, pour ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$,

1°. Je les réduis; & j'ai $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ $= \frac{8 \cdot 9}{12}$.

2°. Je soustrais 8 de 9; & j'ai $9 - 8$.

3°. Je mets $9 - 8$ sur le dénominateur 12; & j'ai la différence $\frac{9 - 8}{12} = \frac{1}{12}$.

Pour retrancher $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b}$, on

peut écrire $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

S'il faut fouftraire plufieurs fractions de plufieurs fractions, par exemple, $\frac{5}{8} + \frac{6}{12}$ de $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; les ayant réduites au même dénominateur & à la plus fimple expref-
* N. 199 & 201. fion *, j'ai... $\frac{108}{96} \ldots = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$, & ... $\frac{10}{8}$, ou $\frac{9}{8}, \frac{10}{8}$; enfin, ôtant la fomme réduite des premières de la fomme des fecondes, j'ai la différence $\frac{10-9}{8} = \frac{1}{8}$.

PROBLÉME III.

211. *Multiplier des Fractions.* Je multiplie les numérateurs l'un par l'autre, & les dénominateurs de même; & le produit des numérateurs étant mis fur l'autre, donne une fraction qui eft le produit total, & qui fe réduit à fa plus fimple expreffion.

Pour multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, j'é-

cris $\frac{ac}{bd}$ qui eſt le produit.

Car ſoit $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$: il ſuffit de prouver que $\frac{ac}{bd} = mn$.

Or $a = bm$, & $c = dn$* : donc $ac = bdmn$: mais $\frac{bdmn}{bd} = mn$ * : donc $\frac{ac}{bd} = mn$. * N. 105. *N. 50.

De-là $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{20}$, & pour multiplier $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, j'écris $\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

212. S'il faut multiplier une fraction par un entier ; ayant réduit l'entier en fraction *, ou mis l'unité deſſous ; je multiplie, comme j'ai fait *. * N. 205. * N. 211.

S'agit-il de multiplier $\frac{ab}{c}$ par d ?

1°. Je réduis d en fraction ; & j'ai $\frac{d}{1}$.

2°. Je multiplie $\frac{ab}{c}$ par $\frac{d}{1}$; & j'ai $\frac{abd}{1c} = \frac{abd}{c}$.

Ainsi, $\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{9}$.

De-là, une quantité écrite immédiatement à la droite d'une fraction, est censée être au numéra-
*N. 14. teur. $\frac{a}{b}x = \frac{a}{b} \times x$ * $= \frac{a}{b} \times \frac{x}{1} = \frac{ax}{b}$.

Enfin, s'il est question de multiplier une fraction & un entier par une fraction & un entier, on réduira chaque entier en une fraction qui ait même dénominateur que celle qui l'accompagne; & l'on multipliera les deux fractions totales *.

** N. 211. Faut-il multiplier $\frac{am}{b} - n$ par $\frac{am}{b} + n$?

1°. Je réduis chaque entier le multipliant par le dénominateur de sa fraction; & j'ai $\frac{am - bn}{b}$, & $\frac{am + bn}{b}$.

2°. Je multiplie le numérateur total par le numérateur, le dénomi-

nateur par le dénominateur*: & le produit est $\frac{a^2m^2 - abmn + abmn - b^2n^2}{b^2}$ $= \frac{a^2m^2 - b^2n^2}{b^2}$. * N. 211.

213. Si la fraction $\frac{a}{b}$ qui multiplie est plus petite que l'unité 1, le produit $\frac{ac}{bd}$ sera moindre que la fraction multipliée $\frac{c}{d}$: car l'unité est au multiplicateur, comme la quantité multipliée au produit *, & le produit est à la quantité multipliée, comme le multiplicateur à l'unité. * N. 134.

1. $\frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$ * ; & par conséquent $\frac{ac}{bd} . \frac{c}{d} :: \frac{a}{b} . 1$ * : donc si $\frac{a}{b} < 1$, $\frac{ac}{bd} < \frac{c}{d}$. * N. 134 & 135. * N. 144.

Aussi $\frac{3}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \frac{3}{1}$.

De-là, par le même principe ; plus le multiplicateur diminuera de grandeur, plus le produit sera petit ; $\frac{1}{1} \times \frac{1}{1000000} = \frac{1}{1000000}$.

Enfin, si deux fractions sont plus petites que l'unité, leur produit est moindre que l'unité, puisqu'il est plus petit qu'une grandeur moindre que l'unité; $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$

* N. 211. $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ *.

PROBLÉME IV.

214. *Diviser des Fractions.*

Je multiplie d'abord le numérateur du Dividende par le dénominateur du Diviseur; puis le dénominateur du Dividende par le numérateur du Diviseur; & le premier produit mis sur le second donne une fraction qui est le Quotient, qu'on réduit, s'il se peut.

Je dis que $\frac{a}{b}$ divisée par $\frac{c}{d}$ ou $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ $= \frac{ad}{bc}$.

Soit $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$. Il suf-

fit de prouver que $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$.

$a = bm$, & $c = dn$ *, donc $\frac{ad}{bc} = \frac{bdm}{bdn}$: or $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$ * : donc $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$. * N. 105. * N. 149.

D'ailleurs, l'unité eſt au Quotient, comme le Diviſeur au Dividende * : donc en *raiſon alterne*, l'unité eſt au Diviſeur comme le Quotient au Dividende : donc *invertendo* le Diviſeur eſt à l'unité comme le Dividende au Quotient *. * N. 134. * N. 144.

Cela poſé ; ſoit $\frac{c}{d}$ le Diviſeur ; $\frac{a}{b}$, le Dividende ; x le Quotient.

Donc $\frac{c}{d} . 1 :: \frac{a}{b} . x$; or $\frac{c}{d} . 1 : \frac{a}{b} . \frac{ad}{bc}$, puiſque * $1 \times \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{ad}{bc} = \frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$. * N. 135.

Ainſi, pour diviſer $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, je multiplie d'abord 2 par 5, puis 3 par 4 ; & mettant le premier pro-

duit 10 ſur le ſecond 12, j'ai le Quotient $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Pour diviſer un entier par une fraction, je réduis l'entier en fraction.

* N. 205. Faut-il diviſer $4 = \frac{4}{1}$ * par $\frac{2}{3}$? J'écris $\frac{4 \times 3}{1 \times 2} = \frac{12}{2}$; $b = \frac{b}{1}$ par $\frac{c}{d}$? J'écris $\frac{b \times d}{1 \times c} = \frac{bd}{c}$.

Pour diviſer un entier & une fraction par un entier & une fraction, je réduis chaque entier & ſa fraction à une fraction.

Faut-il diviſer $4, \frac{2}{3} = \frac{4}{1} + \frac{2}{3} = \frac{12 + 2}{3} = \frac{14}{3}$ par $5, \frac{3}{4} = \frac{5}{1} + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$; en un mot $\frac{14}{3}$ par $\frac{23}{4}$? J'écris $\frac{14 \times 4}{3 \times 23} = \frac{56}{69}$.

S'il faut diviſer $b + \frac{c^2}{d}$ par $x + \frac{y^2}{z}$; j'ai par réduction $\frac{bd + c^2}{d}$ à diviſer par $\frac{xz + y^2}{z}$ * ; & le Quotient eſt $\frac{bd \times z + c^2 \times z}{d \times xz + d \times y^2} = \frac{bdz + c^2 z}{dxz + dy^2}$.

* N. 203 & 205.

De-là, quand le Diviseur est plus petit que le Dividende, la fraction qui est le Quotient, se trouve plus grande que l'unité, ayant un numérateur plus grand que le dénominateur. Divisez $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$: le Quotient est $\frac{4}{2} = 2$. Divisez $\frac{1}{1}$ par $\frac{1}{1000000}$: le Quotient est $\frac{1000000}{1}$. Ainsi, une grandeur divisée par zero = une grandeur infiniment petite, deviendra, pour ainsi dire, infiniment grande ; $\frac{1}{0} = \infty$; & par conséquent $\infty \times 0 = 1$ *.

* N. 105.

EUDOXE. Après avoir parcouru tant de vérités éxactement démontrées, n'allons pas nous perdre dans l'infini.

ARISTE. Disposons-nous plûtôt à former les puissances & à extraire les racines des fractions.

XI. ENTRETIEN.

Sur l'éxaltation des puissances & l'extraction des racines des fractions.

ARISTE. VOus en serez quitte, Eudoxe, pour entendre quelques réflexions sur les puissances & sur les racines fractionnaires.

EUDOXE. La justesse de ces réflexions pourra suppléer au nombre & me dédommager.

215. Commençons par élever une fraction à une puissance qui ait pour exposant un nombre entier positif.

ARISTE. Je multiplie la fraction par elle-même, c'est-à-dire, le numérateur par le numérateur, le dénominateur par le dénominateur *, autant de fois, moins une,

* N. 211.

que l'unité ſe trouve dans l'expoſant de la puiſſance donnée *. *N.26.

Ainſi la ſeconde puiſſance de $\frac{2}{3}$ $=\frac{2\times 2}{3\times 3}=\frac{4}{9}$; la troiſième $=$ $\frac{2\times 2\times 2}{3\times 3\times 3}=\frac{8}{27}$.

La ſeconde puiſſance de $\frac{b}{c}$ ſera $\frac{b\times b}{c\times c}=\frac{b^2}{c^2}$; la troiſième, $\frac{b^3}{c^3}$ &c.

La ſeconde puiſſance de $\frac{a-b}{c-d}$ ſera $\frac{a^2-2ab+b^2}{c^2-2cd+d^2}$.

La ſeconde puiſſance de $x-\frac{1}{2}b=\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}b$, ſera $\overline{\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}b}\times\overline{\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}b}=x^2-\frac{1}{2}bx-\frac{1}{2}bx+\frac{1}{4}b^2=x^2-bx+\frac{1}{4}b^2$ *. *N. 30 & 211.

Eudoxe. Après cela, vous trouverez aiſément la racine d'une fraction dont la puiſſance ait pour expoſant un nombre entier, ou qui ſoit une ſeconde puiſſance, une troiſième, &c.

Ariste. La puiſſance de la fraction eſt celle du numérateur miſe

sur celle du dénominateur *. Cela posé ; ſuivant les régles de l'extraction des racines des quantités entiéres *, j'extrais d'abord la racine du numérateur ; puis celle du dénominateur ; & la première miſe ſur la ſeconde me donne une fraction qui eſt la racine totale.

* N. 215.

* N. 70.

Pour avoir la racine ſeconde de $\frac{a^2}{b^2}$, je dis : la racine ſeconde de a^2 eſt a ; celle de b^2 eſt b *. Ainſi, $\frac{a}{b}$ eſt la racine ſeconde de $\frac{a^2}{b^2}$. Par la même raiſon, $\frac{a}{b}$ ſera la racine troiſième de $\frac{a^3}{b^3}$, & $\sqrt[4]{\frac{a^4}{b^4}}$.

* N. 70.

La racine ſeconde de $\frac{a^4}{b^4}$ ſera $\frac{a^2}{b^2}$.

En général la racine n de $\frac{a^n}{b^n}$ ſera $\frac{a}{b}$; la racine n de $\frac{a^{2n}}{b^{2n}}$ ſera $\frac{a^2}{b^2}$.

Ainsi la racine quarrée de $\frac{25}{36}$ sera $\frac{5}{6}$, puisque $5 = \sqrt{25}$, & $6 = \sqrt{36}$.

S'il s'agit d'une quantité complexe qui contienne des entiers avec une fraction; je réduis les entiers en fraction *, & je suis la regle que je viens de suivre. * N. 205.

Soit $a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{1}a^2 - \frac{1}{1}ab$
o o o
$+ \frac{1}{4}b^2 : (a - \frac{1}{2}b.$

1°. Je dis, $\sqrt{\frac{1}{1}a^2} = \sqrt{a^2} = a$; j'écris a au Quotient, & o sous a^2 *. *N. 73.

2°. Divisant le reste $-ab + \frac{1}{4}b^2$ par $2a$, double de la première racine a, je dis: le Quotient de $-\frac{1}{1}ab = -ab$ par $2a$ est $-\frac{1}{2}b$: car $2a \times -\frac{1}{2}b = \frac{2}{1}a \times -\frac{1}{2}b = -\frac{2}{2}ab = -\frac{1}{1}ab = -ab$. J'écris donc $-\frac{1}{2}b$, seconde racine, & o sous $-ab$.

Enfin, je dis: $-\frac{1}{2}b \times -\frac{1}{2}b = +\frac{1}{4}b^2$, produit que je retranche,

& je pose o ; & puisqu'il ne reste rien, $a - \frac{1}{2}b$ est la racine cherchée.

EUDOXE. Et je vous livre à vos réflexions.

ARISTE. Hé bien, $x^{1+1} = x^1 \times x^1 = x^2$; & $x^{1+1+1} = x^1 \times x^1 \times x^1 = x^3$ *.

*N. 24.

Donc $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}$, &c. les parties se multiplient comme les touts.

De-là, 1°. Dans les puissances fractionnaires, comme dans les autres, la somme des exposans des grandeurs multipliées est l'exposant du produit.

2°. De même que le double, le triple, &c. de l'exposant d'une grandeur x, est l'exposant du quarré, du cube, &c. de cette grandeur; la moitié, ou le tiers, &c. de l'exposant de cette grandeur x, sera l'exposant de sa racine quarrée, ou de sa racine cube, &c. x^{1+1} est l'expo-

ſant du quarré de x^1; x^{1+1+1}, du cube : $x^{\frac{1}{2}}$ ſera l'expoſant de la racine quarrée de x^1 ; $x^{\frac{1}{3}}$, de la racine cube, &c. $\overline{x^2 - z^2}^{\frac{1}{2}}$, de la racine quarrée de $x^2 - z^2$, &c.

3°. Par conſéquent, au lieu d'exprimer la racine d'une grandeur x par le ſigne radical $\sqrt{}$ mis devant x, en cette manière $\sqrt{x}$, on peut la repréſenter par une fraction miſe après & un peu plus haut, en cette ſorte $x^{\frac{1}{2}}$, &c. le dénominateur ſera 2 pour la racine ſeconde ; 3 pour la racine troiſième, &c.

$\sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$: auſſi, $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1$.

$\sqrt[3]{a^1} = a^{\frac{1}{3}}$: car $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^1$.

$\sqrt[4]{a^1} = a^{\frac{1}{4}}$, par la même raiſon.

$\sqrt[100000]{a^1} = a^{\frac{1}{1000000}}$.

De-là, en général, si l'on divise l'exposant d'une puissance par l'exposant d'une racine quelconque, on a cette racine dans le Quotient.

$\sqrt[2]{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1$: car $a^{\frac{2}{2}} \times a^{\frac{2}{2}} = a^{\frac{2}{2}+\frac{2}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^{\frac{2}{1}} = a^2$.

$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$: car $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^{\frac{2}{1}} = a^2$.

Enfin les fractions ont leurs proportions & leurs progressions.

EUDOXE. Et vous me ferez part encore de votre idée là-dessus.

ARISTE. A demain.



XII.

XII. ENTRETIEN.

Sur les proportions & les progressions fractionnaires.

216. *EUDOXE.* Il faut commencer, Ariste, par trouver un quatrième terme proportionnel à trois fractions.

ARISTE. Je multiplie la seconde par la troisième, & divisant le produit par la première, j'ai la quatrième dans le Quotient *. * N. 137.

Soit $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$: : $\frac{3}{4}$: je multiplie d'abord $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$; le produit est $\frac{6}{12}$ *. * N. 211.
Ensuite je divise $\frac{6}{12}$ par $\frac{1}{2}$; & le Quotient $\frac{12}{12}$ * est le quatrième terme; & par conséquent, $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$: : $\frac{3}{4}$. $\frac{12}{12} = \frac{1}{1}$. * N. 214.

Aussi, $\frac{12}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$.

Soit $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$: : $\frac{e}{f}$: le quatrième

terme sera $\frac{ce}{df}$ divisé par $\frac{a}{b}$, ou $\frac{bce}{adf}$.

Si l'on me donne $\frac{ab}{c}$. $\frac{de}{f}$: : g.

1°. Je réduis l'entier g en fraction : vient $\frac{g}{1}$ *.

*N. 203.

2°. Je multiplie $\frac{de}{f}$ par $\frac{g}{1}$; le produit est $\frac{deg}{f}$.

3°. Je divise $\frac{deg}{f}$ par $\frac{ab}{c}$; & le Quotient $\frac{cdeg}{abf}$ est le quatrième terme.

Ainsi, $\frac{ab}{c}$. $\frac{de}{f}$: : $\frac{g}{1}$. $\frac{cdeg}{abf}$.

EUDOXE. De la proportion à la progression, il n'y a qu'un pas à faire.

ARISTE. ÷ x. 1. $\frac{1}{x}$. $\frac{1}{x^2}$. $\frac{1}{x^3}$. $\frac{1}{x^4}$, &c. est une progression descendante & continuée au-dessous de l'unité *, puisque l'exposant qui y regne est le même : car divisez x par 1 : l'exposant est x *. Divisez

*N. 152. *N. 203 & 214.

1 par $\frac{1}{x}$: le Quotient ou l'expoſant eſt $\frac{x}{1} = x$. Diviſez $\frac{1}{x}$ par $\frac{1}{x^2}$: l'expoſant eſt $\frac{x^2}{x} = x$ * &c. *N. 50.

Et cette progreſſion retournée devient aſcendante.

Eudoxe. Quelle différence mettez-vous entre les Suites ou Séries ; $\div x.\ 1.\ \frac{1}{x}.\ \frac{1}{x^2}.\ \frac{1}{x^3}.\ \frac{1}{x^4}$, &c. & $\div x.\ 1.\ x^{-1}.\ x^{-2}.\ x^{-3}.\ x^{-4}$, &c.

Ariste. Tout cela revient au même : car ſi l'on diviſe une puiſſance par une puiſſance de la même lettre en ôtant l'expoſant de l'expoſant, le reſte eſt l'expoſant du Quotient. $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1$ *. De-là *N. 59. $\frac{x^1}{x^1} = x^{1-1} = x^0 = 1$ * : donc * Ibid. $\frac{x^0}{x^1} = x^{0-1} = x^{-1}$: donc $\frac{x^0}{x^2} = x^{-2}$; $\frac{x^0}{x^3} = x^{-3}$, &c. & puiſque $x^0 = 1$, $\frac{1}{x^1} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$,

&c. Ainsi ∻ x. 1. $\frac{1}{x}$. $\frac{1}{x^2}$. $\frac{1}{x^3}$. $\frac{1}{x^4}$ &c. $= x$. 1. x^{-1}. x^{-2}. x^{-3}. x^{-4}. &c.

Et par conséquent, pour transformer la première Suite en la seconde, on effacera le numérateur de chacun de ses termes, & l'on rendra ses exposans négatifs ; l'on transformera la seconde en la première, en rendant positifs les exposans de la seconde, & mettant chacun de ses termes au dénominateur d'une suite fractionnaire, dont le numérateur sera toujours 1.

Cela posé, si $x^1 = 4$, $\frac{1}{x^1} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}$; $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{64}$, &c.

Ainsi, $\frac{1}{x^1}$. $\frac{1}{x^2}$. $\frac{1}{x^3}$. $\frac{1}{x^4}$.... $\frac{1}{x^\infty}$, sera une Série fractionnaire infinie, dont les dénominateurs seront les puissances de 4.

Retournez cette Série, la joi-

gnant à celle des puissances de 4 : vous aurez la Suite infinie $\frac{1}{x^\infty}\ldots\frac{1}{x^4}.\frac{1}{x^3}.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^1}.\ x^0 = 1.\ x^1.\ x^2.\ x^3.\ x^4\ldots x^\infty$.

$= \frac{1}{\infty}\ldots\frac{1}{256}.\ \frac{1}{64}.\ \frac{1}{16}.\frac{1}{4}.\ 1.\ 4.\ 16.\ 64.\ 256$, &c.

$= x^{-\infty}\ldots x^{-4}.\ x^{-3}.\ x^{-2}.\ x^{-1}.\ x^0.\ x^1.\ x^2.\ x^3.\ x^4\ldots x^\infty$.

EUDOXE. Mais, Ariste, je vous donne deux termes, *a* & *b* d'une progression géométrique. Il s'agit de trouver la suite en termes fractionnaires par une autre voye que celle des exposans.

ARISTE. Le Quotient du quarré de la seconde grandeur qui est moyen *, par la première, sera le troisième; le Quotient du quarré de la troisième par le second, sera le quatrième, &c*.

* N. 152.

* N. 139.

{De-là $\div a.b.\ \frac{b^2}{a}.\ \frac{b^3}{a^2}.\ \frac{b^4}{a^3}$; &c. car b^2 divisé par $a = \frac{b^2}{a}$ *, $\frac{b^2}{a}$ ×

* N. 194.

* N. 310 XIII. ENTRETIEN

211. ** N. $\frac{b^2}{a} = \frac{b^4}{a^2}$ * & $\frac{b^4}{a^3}$ divisé par $b = \frac{b^4}{a^2 b}$ **

214. * N. $= \frac{b^3}{a^2}$ *, &c.

149. *EUDOXE*. Apparemment les équations nous donneront bientôt des Problêmes plus sensibles.

ARISTE. Au premier jour.

XIII. ENTRETIEN.

Sur les Equations.

EUDOXE. Je le sçais, Ariste, nous allons faire une espèce d'Anatomie qui demande de l'attention, & de votre part pour parvenir à démêler des vérités inconnuës, parmi d'autres qui ne le sont pas, & de mon côté pour vous suivre sans vous perdre de vûe.

ARISTE. La lumière de quelques principes & de quelques Problêmes éclaircis, éclaireront nos

pas dans les labyrinthes où nous cherchons des vérités cachées; & celles que nous avons découvertes, nous serviront de guides.

217. D'abord, équation est le signe d'égalité entre deux quantités de valeur égale, comme $a + x = b - c$. Les deux quantités sont les membres de l'équation.

218. Or à choses égales, ajoutez choses égales : les touts sont égaux. De choses égales ôtez choses égales; les restes sont égaux.

Si l'on multiplie deux grandeurs égales, ou qu'on les divise par la même, les produits ou les Quotiens sont égaux *, & par conséquent les racines égales donnent des puissances égales, & au contraire : donc si l'on ajoute également aux deux membres d'une équation, ou qu'on en retranche également; qu'on les multiplie ou qu'on les divise par la même quantité; l'équation subsiste *.

* N. 147 & 149.

* N. 217.

219. De-là, si un terme d'un membre a le signe —, & qu'on transporte ce terme dans l'autre en changeant le signe, l'équation subsiste, puisqu'on ajoute
*N.13. également de part & d'autre *. Si $a+x=b-c$, $a+c+x=b$; car en effaçant $-c$ du membre $b-c$, on ajoute à b
N.13. la valeur de c; & transposant c avec le signe $+$ dans l'autre membre $a+x$, on ajoute à ce
N.12. membre la valeur de c.

220. Si un terme d'un membre a le signe $+$, & qu'on transporte ce terme dans l'autre membre avec le signe —, l'équation
*N. 218. subsiste *, puisqu'on retranche également de part & d'autre. Si $a+x=b$; $a=b-x$: car en transposant x avec le signe — qu'il n'avoit pas, on le retranche des deux côtés.

221. On peut rendre *positifs* tous les termes d'une équation en transposant

transposant avec le signe + ceux qui ont le signe —. $a - b + c - d = b^2 + c^2$ deviendra $a + c = b^2 + c^2 + b + d$ *, où il n'y a que des termes positifs. * N. 219.

222. On peut aussi transporter tous les termes d'un membre dans l'autre en égalant à zero, c'est-à-dire en soustrayant un membre de l'autre, & mettant zero seul d'un côté. L'équation subsistera: car si d'une grandeur on ôte une grandeur égale, le reste est égal à zero; & si lorsqu'on ôte une grandeur d'une autre, la différence est zero, il y a égalité de grandeurs. Qui dit $a+b=c+d$, ou $a+b-c-d=0$, dit la même chose.

223. En transposant ainsi des termes d'un membre, on dégage un autre terme: & un terme qui par la transposition des autres qui l'accompagnoient, vient à se trouver seul dans un seul membre, est une *quantité dégagée*.

224. Si une quantité qui étoit inconnue, se trouve dégagée, & que l'on connoisse les termes de l'autre membre; elle cesse d'être inconnue.

Ainsi l'équation conduit à la connoissance de l'inconnue en la dégageant.

225. Les quantités connues se désignent par les premières lettres de l'alphabet; les inconnues par les dernières z, y, x, u, &c.

226. Les grandeurs qui accompagnent l'inconnue x, lui sont ajoutées, ou en sont soustraites; la multiplient, ou la divisent. Sont-elles ajoutées? on la dégagera par la Soustraction; soustraites? par l'Addition; multiplient-elles? par la Division; divisent-elles? par la Multiplication.

S'il faut dégager x dans $x+a = b+c$; on soustrait a de part
* N. 220. & d'autre. L'on a $x = b+c-a$* & x se trouve dégagée.

Dans $x - a = b + c$, on ajoutera de part & d'autre a; & l'on aura $x = a + b + c$ *. * N. 219.

Dans $xa = b + c$, on divisera par a ; & l'on aura $x = \frac{b+c}{a}$ *. * N. 218.

Dans $\frac{x}{a} = b + c$, on multipliera par a; & l'on aura $x = ab + ac$ *. * N. 195 & 218.

Enfin, on dégage les inconnues par l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion, la ſubſtitution, l'extraction, ou l'exaltation des racines.

PROBLÉME I.

227. *EUDOXE. Dégager une inconnue par l'Addition, ou par la Souſtraction, ou par l'une & l'autre.*

ARISTE. J'ôte les quantités qui l'accompagnent dans un membre, lesmettant dans l'autre avec des ſignes contraires *. * N. 219 & 220.

Ainſi, $x + a - b = c + d$ de-

vient $x = c + d - a + b$.

PROBLÉME II.

228. *EUDOXE. Dégager par la Multiplication une inconnue fractionnaire x.*

ARISTE. Je multiplie tous les termes de l'équation par le Diviseur de la fraction.

* N. 195. Soit $\frac{x}{c} = a + b$: 1°. $\frac{x}{c} \times c = x$ *.
* N.27. 2°. $\overline{a+b} \times c = ac + bc$ *. Donc le produit total est $x = ac + bc$, équation égale à la première $\frac{x}{c}$
* N. 218. $= a + b$ *, les produits des grandeurs égales par même multiplicateur étant égaux.

De-là, l'on délivrera de fractions une équation en multipliant tous les termes de l'équation par les dénominateurs des fractions.

$ax + \frac{b^2}{c} = d^2 + \frac{e}{f}$, deviendra $acfx + b^2f = cd^2f + ce$.

PROBLÉME III.

229. *EUDOXE. Dégager une inconnue x par la Division.*

ARISTE. Je divise chaque membre par la quantité qui multiplie l'inconnue x *. * N. 226.

Soit $ax = bc$: je divise par a ; le Quotient est l'équation $x = \frac{bc}{a}$, qui dit que la valeur de x est bc divisée par a.

230. Si l'inconnue se trouve dans le premier membre, multipliée par une quantité connue, & dans le second, multipliée par une autre quantité connue ; je la fais passer du second membre dans le premier avec un signe contraire ; & je divise par les deux quantités connues.

Soit $ax = b^2 + cx$.

1°. Je transpose cx ; & j'ai $ax - cx = b^2$ *. * N. 220.

2°. Je divise par $a - c$; & le

* N. 218. Quotient est $x = \frac{b^2}{a-c}$ *.

231. Si les deux membres ont un Diviseur commun, & qu'on divise chaque membre par ce Diviseur, on réduit l'équation à une plus simple expression *. * N. 201.

Soit $b^3x - bx^3 = b^3c - bcx^2$.

Je divise par le Diviseur commun $\overline{b^3 - bx^2}$: le Quotient est $x = c$ *: car $x \times \overline{b^3 - bx^2} = b^3x - bx^3$, & $c \times \overline{b^3 - bx^2} = b^3c - bcx^2$. * N. 50.

PROBLÊME IV.

232. EUDOXE. *Dégager une inconnue par l'extraction des racines.*

ARISTE. Si un membre n'a que des quantités connues, & que l'autre où se trouve l'inconnue, soit un quarré, ou un cube, j'extrais la racine de chaque membre *; & ces racines font une équation plus simple *, dans laquelle je dégage l'inconnue, comme nous l'avons fait *. * N. 73. & 78. * N. 218. * N. 226.

Soit $b^2 + 2bx + x^2 = cd + ef$.

1°. J'extrais la racine feconde du premier membre qui eft un quarré * , avec celle du fecond *N.73. membre, laquelle ne s'extrait que par indiction * ; vient $b + x =$ *N.75. $\sqrt[2]{cd + ef}$.

2°. Faifant paffer b du premier membre dans le fecond *, je trou- * N. ve $x = \sqrt[2]{cd + ef} - b$, qui dit, 220. que fi je prens la racine feconde de $cd + ef$, & que de cette racine je retranche la valeur de b, le refte fera la valeur de x dégagée.

PROBLÉME V.

232. EUDOXE. *Dégager une inconue par fubftitution.*

ARISTE. Subftituer dans une équation, c'eft y mettre à la place d'une inconnue fa valeur avec le même figne, multipliée de même, ou divifée, élevée ou réduite à fa racine. Comme l'on met à la place d'une grandeur une gran-

deur égale, l'équation ſubſiſte.

Ainſi, ayant mis à la place d'une inconnue ſa valeur, j'opére ſur cette valeur & ſur le reſte de l'équation ſuivant les régles précédentes.

Exemple I.

Soient l'équation $x - y = a$, & $b - x$, valeur de la ſeconde inconnue y.

1°. A la place de $-y$, je mets
* N. 12. ſa valeur $- b + x$ *;

Vient $x - b + x = a$, ou $2x$
* N. 8. $- b = a$ *.

2°. Je tranſpoſe $-b$: vient $2x$
* N. 219. $= a + b$ *.

* N. 2. 3°. Je diviſe par 2 *: vient $x = \frac{a+b}{2}$, équation plus ſimple, où l'inconnue x eſt dégagée.

Exemple II.

Soient l'équation $z^2 - 2z - 3$
* N. 222. $= 0$ *, & $x + 1$, valeur de z.

1°. A la place du quarré z^2, je mets $x^2 + 2x + 1$, quarré de $x + 1$ *. *N. 35.

2°. A la place du produit $-2z$, je mets $-2x - 2$, produit de $x + 1$, valeur de z, par -2.

De-là, $x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 - 3 = 0$.

Ou $x^2 - 4 = 0$ *, équation * N. 8. égale à la propoſée.

3°. Je tranſporte -4 pour avoir $x^2 = 0 + 4$, ou $x^2 = 4$ *. * N. 119.

Donc $x = 2$, les racines des puiſſances égales étant égales *. * N. 218.

Et par conſéquent $x + 1 = z = 3$.

PROBLÉME VI.

233. *Eudoxe. Dégager enfin une quantité du ſigne radical.*

Ariste. 1°. La quantité qui en eſt affectée, je la mets ſeule d'un côté de l'équation *. * N. 219 & 220.

2°. J'éleve les deux membres à la puiſſance marquée par l'expo-

ſant du ſigne radical du premier membre *. L'équation ſubſiſte **; & la grandeur élevée à cette puiſſance, eſt délivrée du ſigne radical de cette puiſſance.

*N. 26. **N. 218.

Soit $x^2 + \sqrt[2]{bx} - c = 0$.

1°. Je tranſpoſe $\sqrt[2]{bx}$, écrivant $x^2 - c = 0 - \sqrt[2]{bx}$.

2°. Je quarre les deux membres : vient $x^4 - 2cx^2 + c^2 = bx$, équation dégagée du ſigne radical $\sqrt{}$.

EUDOXE. Enfin, Ariſte, il n'eſt plus queſtion que de voir comment l'analyſe s'y prend pour faire uſage de ces regles différentes, pour réſoudre les Problêmes ou les queſtions de différents dégrés.

ARISTE. Et nous le verrons bientôt.



pas dans les labyrinthes où nous cherchons des vérités cachées; & celles que nous avons découvertes, nous serviront de guides.

217. D'abord, équation est le signe d'égalité entre deux quantités de valeur égale, comme $a + x = b - c$. Les deux quantités sont les membres de l'équation.

218. Or à choses égales, ajoutez choses égales : les touts sont égaux. De choses égales ôtez choses égales; les restes sont égaux.

Si l'on multiplie deux grandeurs égales, ou qu'on les divise par la même, les produits ou les Quotiens sont égaux *, & par conséquent les racines égales donnent des puissances égales, & au contraire : donc si l'on ajoute également aux deux membres d'une équation, ou qu'on en retranche également ; qu'on les multiplie ou qu'on les divise par la même quantité ; l'équation subsiste *.

* N. 147 & 149.

* N. 217.

vante, ainsi de suite.

Dans $ax^2 + bx + x^3 - cd = 0$, x^3 est le premier terme ; ax^2, le second ; bx, le troisième ; $-cd$, le dernier.

238. L'équation ordonnée est celle où la plus haute puissance de l'inconnue se trouve la première, suivie des autres selon leurs dégrés ; & si zero se trouve seul d'un côté, le dernier terme n'a que des grandeurs connues, comme $x^3 + ax^2 + bx - cd = 0$.

239. J'appelle ici coëfficient les grandeurs connues & linéaires, qui multiplient l'inconnue : dans bx, b est coëfficient. Le premier terme d'une équation ordonnée n'a d'autre coefficient que l'unité, comme $1x^3 = x^3$.

Les termes affectés sont ceux qui ont des coëfficiens avec des signes propres, comme $-bx$. Lorsqu'un terme affecté a plusieurs coëfficiens, comme $-ax^2$

$-bx^2 - cx^2$, pour abreger, l'on ne joint l'inconnue qu'avec un coëfficient, écrivant les autres coëfficiens dessous, comme

$$-ax^2,$$
$$-b,$$
$$-c.$$

240. Deux équations simples multipliées l'une par l'autre produisent une équation composée, puisque les produits de grandeurs égales par grandeurs égales sont égaux *; le quarré de $x - a = 0$, fera $x^2 - 2ax + a^2 = 0$. Ainsi, les équations simples sont racines des équations composées.

* N. 147.

Résoudre une équation composée, c'est la réduire à une équation simple, dont un membre soit l'inconnue dégagée ; & l'autre membre, sa valeur connue.

241. Une question est *indéterminée* quand plusieurs grandeurs différentes ont également les conditions requises pour la résoudre.

Par exemple, on demande une grandeur qui ſoit la quatrième partie d'une autre; 2 & 8, 4 & 16, ont également les conditions requiſes pour la réſolution du Problême : car 2 eſt la quatrième partie de 8, comme 4 de 16; ainſi, le Problême eſt *indéterminé*.

242. Pour former les équations propres à réſoudre une queſtion.

1°. L'analyſe déſigne les quantités connues & les inconnues par des lettres convenables*.

2°. Elle examine les rapports de ces grandeurs; & ces rapports connus donnent les équations.

* N. 224.

Faut-il trouver deux grandeurs inconnues dont l'on connoiſſe la ſomme & la différence ?

1°. L'analyſe dit: ſoit la ſomme connue . . . . $=a$,
la différence . . . . $=b$,
la plus grande & la première inconnue . . . . $=x$,
la ſeconde inconnue . . . $=y$.

2°. Connoiſſant le rapport de la ſomme à a, & celui de la différence à b, l'analyſe dit : la ſomme $= a$ eſt $x + y$: donc $x + y = a$; & c'eſt la première équation.

La différence $= b$ eſt $x - y$: donc $x - y = b$; & c'eſt la ſeconde équation.

Voilà autant d'équations que d'inconnues.

Cela poſé, ſoit le Problême général.

Réſoudre les Queſtions du premier dégré.

243. 1°. Je déſigne les grandeurs connues & les inconnues *.

* N. 225. 2°. Je fais autant d'équations, s'il ſe peut, qu'il y a d'inconnues : car c'eſt en comparant chaque inconnue avec quelque grandeur connue qu'on découvre leur différence, & ce qu'il faut ajouter ou retrancher pour les rendre égales.

3°.

3°. Je dégage quelques inconnues pour avoir leurs valeurs.

4°. Je ſubſtituë la valeur de chaque inconnue dégagée de la ſorte, dans les autres équations où elle ſe trouve, pour avoir une équation totale qui n'ait qu'une inconnue.

Enfin, je dégage cette inconnue; & j'ai l'équation ſimple qui décide la queſtion.

QUESTION I.

244. EUDOXE. Hé bien, *ſi l'on partage* 100 *en deux quantités dont la différence ſoit* 40, *quelles ſeront ces deux quantités ?*

ARISTE. Pour les trouver, 1°. Je déſigne les deux quantités connues & les deux inconnues, en diſant: ſoit . . . . . $100 = a$,

$40 = b$,

la plus grande & la première inconnue . . . . $= x$;

la ſeconde inconnue . . . $= y$. * *N. 225.

2°. Faisant autant d'équations qu'il y a d'inconnues, je dis : par la première condition, $x+y=a$, première équation.

Par la seconde condition, $x-b=y$, seconde équation : car $b=40$ est la différence des inconnues x, y.

3°. Je substitue à y dans la première équation, sa valeur $x-b$, pour avoir $x+x-b=a$, ou $2x-b=a$.

4°. Ajoutant b de part & d'au-
* N. tre, j'ai $2x=a+b$*.
219. 5°. Comme x est multipliée par
* N. 2, je divise l'équation par 2* : le
226. Quotient est $x=\frac{a+b}{2}$, ou $\frac{100+40}{2}=70=x$; & par conséquent $y=30$, puisque $70+30=100$.

Donc les deux quantités qu'il falloit trouver, sont 70 & 30.

QUESTION II.

245. EUDOXE. *Je suppose trois*

ſommes de louis : la première en contient 5 moins que la ſeconde ; la première & la ſeconde contiennent, priſes enſemble, la moitié de la troiſième, & les trois font enſemble 75 louis : combien chaque ſomme en contient-elle ?

ARISTE. 1°. Soit la première inconnue . . . . $= x$,
la ſeconde . . . . $= y$,
la troiſième . . . . $= z$.

2°. Par la première condition. $x = y - 5$. 1re. équat.
par la 2e. $x + y = \frac{1}{2}z$. 2e. équat.
par la 3e. $x + y + z = 75$. 3e. équat.

Voilà autant d'équations que d'inconnues.

3°. Par la première condition $x = y - 5$: donc $x + 5 = y$. De-là, ſubſtituant $x + 5$ à la place d'y dans la ſeconde équation, j'ai $2x + 5 = \frac{1}{2}z$; & par conſéquent $4x + 10 = z$.

4°. Dans la troiſième équation,

$x+y+z=75$, je substitue à la place d'y & de z leurs valeurs, & j'ai $x+x+5+4x+10=75$, ou $6x+15=75$.

Voilà les trois inconnues x, y, z, réduites à une seule x.

5°. Transposant 15, j'aurai $6x$
* N. $=75-15$ *.
220. Ou $6x=60$, équation plus simple.

6°. Je dégage l'inconnue x, divisant $6x=60$ par 6, vient $x=\frac{60}{6}=10$.

Donc $x=10$, vaut 10 louis.

Enfin, connoissant x, je connois les 3 inconnues, x, y, z:

Car $x=10$: donc $y=x+5=15$; & par conséquent $z=4x+10=50$.

Ainsi la première somme contient 10 louis; la seconde 15; la troisième 50; trois sommes qui font ensemble 75 louis.

QUETION III.

246. *EUDOXE.* A, B & C *ont gagné* 1750 *liv.* B, *le double de* A + 20; C, *autant que* A & B + 30 : *combien chacun ?*

ARISTE. 1°. J'appelle x le gain de A : donc par les 3 conditions, le gain de B $= 2x + 20$;

Celui de C $= x + 2x + 20 + 30$, ou $3x + 50$;

$1750 = x + 2x + 20 + 3x + 50$, ou $6x + 70$ *. *N. 8.

Ainsi $6x + 70 = 1750$.

2°. Je transpose 70 : vient $6x = 1750 - 70 \ldots\ldots = 1680$ *. * N. 220.

3°. Je divise par 6 * : le Quotient est $x = \frac{1680}{6} \ldots\ldots = 280$. * N. 226.

Donc $x = 280$ liv. gain de A.

Donc $2x + 20 = 580$ liv. gain de B.

Donc $3x + 50 = 890$ livres, gain de C.

EUDOXE. Venons aux *Questions du second dégré.*

247. *Ariste.* Une équation du second dégré a deux sortes de racines : car $\sqrt{a^2} = x$ ou $-x$, puis-
*N.17. que $x \times x$, ou $-x \times -x = x^2$ *. $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$, ou $-a - b$, puisque $-a - b \times -a - b = a^2 + 2ab + b^2$; par la même raison, $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$, ou $-a + b$.

248. Pour résoudre une équation de cette espèce, l'analyse la prépare, & pour la préparer, commence par ordonner les ter-
* N. 238. mes de l'équation *, mettant de suite d'un côté tous les termes où se trouve l'inconnue ; de l'autre côté, des termes qui ne contiennent que des grandeurs connues : puis par la Division ou par la Multiplication, elle dégage le premier terme de tout autre coëfficient que l'unité, s'il en a un autre.

Soit, par exemple, $3x^2 + 2ax$

$= 1b$: divisez par 3 : vient $1x^2 + \frac{2}{3}ax = \frac{1}{3}b$.

Soit $\frac{2}{5}x^2 + ax = 1b$: multipliés par 5 : vous aurez $2x^2 + 5ax = 5b$; & divisant par 2, vous avez $x^2 + \frac{5}{2}ax = \frac{5}{2}b$ *. * N. 195.

Enfin, si la seconde puissance x^2 de l'inconnue x se trouve multipliée par une grandeur connue d, comme dx^2, on dégage la seconde puissance x^2 en divisant l'équation par la grandeur d qui multiplie cette puissance.

Ainsi $dx^2 + bx = c$, devient $x^2 + \frac{bx}{d} = \frac{c}{d}$ *. * N. 195.

Cela supposé, quelques Problêmes suffiront pour exposer ma manière de résoudre les équations du second dégré.

PROBLÊME I.

249. *Résoudre une équation dont chaque membre n'ait qu'un terme simple.*

Soit $x^2 = b$:

1°. Je prens les racines des deux membres ; & j'ai $x = \sqrt{b}$, puisque les racines des quarrés
* N. 218. égaux sont égales *.

2°. Connoissant la racine de la grandeur connue b, je connois la racine égale de l'inconnue x^2.

PROBLÉME II.

250. *Résoudre une équation dont un membre soit le quarré d'une grandeur complexe.*

Soit $2bx + x^2 + b^2 = c$.

1°. Je prépare l'équation, or-
*N.98. donnant les termes * ; & j'ai $x^2 + 2bx + b^2 = c$.

2°. Je prens la racine quarrée
*N.73. de chaque membre * : vient $x + b = \sqrt{c}$.

3°. Je dégage l'inconnue x, pour avoir $x = \sqrt{c} - b$; & connoissant $\sqrt{c} - b$, je connois x.

PROBLÉME III.

251. *Résoudre une Equation dont un membre contienne deux différentes puissances de l'inconnue sans être un quarré parfait.*

1°. Ayant préparé l'Equation *, je prens la moitié du coëfficient du second terme, & j'éleve cette moitié à la seconde puissance. * N. 248.

2°. J'ajoute cette seconde puissance à chaque membre de l'Equation, & j'ai dans le premier l'expression parfaite d'un quarré *, puisque j'ai le quarré de la première racine, deux fois le plan de la première par la seconde, & le quarré de la seconde. *35.N.

3°. J'extrais la racine de ce quarré parfait; & cette racine est l'inconnue avec la moitié connue du coëfficient du second terme, qui a été élevée à la seconde puissance.

Enfin, cette racine étant égale

à celle du second membre connu, je connois l'inconnue.

Soit l'équation préparée $x^2 + 2bx = c$.

1°. Comme le coëfficient de * N. 239. x au second terme est $2b$ *, dont la moitié est b, je quarre b; vient b^2.

2°. Ajoutant b^2 de part & d'autre, j'ai $x^2 + 2bx + b^2 = b^2 + c$.

3°. L'extraction des racines me *N. 73. donne $x + b = \sqrt{b^2 + c}$ *.

4°. Je retranche b de chaque côté : le reste est $x = - b + \sqrt{b^2 + c}$.

Ainsi je prens la racine de la somme $b^2 + c$; & cette racine, moins la valeur de b, est la valeur de l'inconnue x.

Soit $b = 4$, $c = 9$: donc $b^2 + c = 25$: or $\sqrt{25} = 5$: donc $5 - 4 = 1 = x$.

Si l'extraction des racines don-

ne $-x-b=\sqrt{b^2+c}$, j'ajoute x de part & d'autre : vient $-b = x+\sqrt{b^2+c}$; & retranchant de part & d'autre $\sqrt{b^2+c}$, j'aurai $x=-b-\sqrt{b^2+c}$.

252. Si le plan qui ſuit le quarré x^2 de l'inconnue, n'eſt que bx, & que l'on quarre la moitié de b ou $\frac{1}{2}b$, pour en ajouter le quarré à chaque membre, le premier devient de même une ſeconde puiſſance parfaite : car 1°. Il contient les quarrés x^2 de x & $\frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{2}b \times \frac{1}{2}b$ de $\frac{1}{2}b$. 2°. Un double plan $bx = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}bx$ de x par $\frac{1}{2}b$.

Faut-il réſoudre $x^2 - ax - bc = 0$?

1°. Je mets la grandeur toute connue bc dans le ſecond membre *, & j'ai $x^2 - ax = bc$ **. * N. 248.

2°. Je prens la moitié du coëfficient connu a, qui multiplie l'inconnue linéaire x dans le ſecond terme, & quarrant cette ** N. 219.

*N.35. moitié $\frac{1}{2}a$, j'ai $\frac{1}{4}a^2$ *.

3°. J'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{1}{4}a^2$: vient $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + bc$, Equation dont le premier membre eſt un quarré parfait *. *N.35.

4°. J'extrais la racine de chaque membre, pour avoir $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$ *. *N.73.

Enfin la tranſpoſition, ou l'addition me donne l'Equation ſimple $x = + \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$; & ſubſtituant au ſecond membre les valeurs connues de ſes termes, je connois x

De-là, ſi la première puiſſance de l'inconnue x ſe trouve multipliée par des quantités différentes ; on peut prendre la moitié de la ſomme de ces quantités, quarrer cette moitié, & ajouter ce quarré à chacun des membres de l'Equation : le premier membre ſera un quarré parfait, égal au ſe-

cond membre; & prenant la racine des deux membres, on trouvera la racine de l'inconnue.

PROBLÉME IV.

253. *Résoudre une Equation où la première puissance x de l'inconnue x se trouve multipliée par des quantités différentes.*

Ayant ajouté le quarré de la moitié de ces quantités différentes à chacun des deux membres, j'en extrais la racine.

Soit $x^2 + bx - cx = d$, où x est multipliée par $b - c$.

1°. Je prens la moitié de $b - c$; & cette moitié est $\frac{b-c}{2} = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$ *.

*N. 50.

2°. Je quarre $\frac{b-c}{2}$, & le quarré est $\frac{b^2 - 2bc + c^2}{4}$.

3°. J'ajoute ce quarré à chacun des deux membres.

Enfin, j'extrais la racine de chaque membre ; & l'inconnue dégagée ceſſe d'être inconnue.

PROBLÉME V.

254. *Réſoudre une Equation où la ſeconde puiſſance de l'inconnue ſe trouve multipliée par une grandeur connue.*

Après avoir diviſé l'Equation par la grandeur connue qui multiplie la ſeconde puiſſance de l'inconnue, j'opére ſur le Quo-
* N. 253. tient, comme j'ai fait *.

Soit $dx^2 + bx = c$.

1°. Je diviſe par d, & le Quotient eſt $x^2 + \frac{bx}{d} = \frac{c}{d}$.

2°. Dans le ſecond membre ; la première puiſſance $x = \frac{x}{1}$ eſt multipliée par la fraction $\frac{b}{d}$; car
* N. 211. $\frac{x}{1} \times \frac{b}{d} = \frac{bx}{d}$ *. Je prens donc la

moitié de la fraction $\frac{b}{d}$ coëfficient; & cette moitié est $\frac{1b}{2d}$ $= \frac{b}{2d}$: car l'on a la moitié d'une fraction en la divisant par 2 *; or si l'on divise $\frac{b}{d}$ par $2 = \frac{2}{1}$, le Quotient est $\frac{1b}{2d} = \frac{b}{2d}$ *. * N. 214.

3°. Je quarre cette moitié; & le quarré est $\frac{b^2}{4d^2}$ *. * N. 211.

4°. J'ajoute ce quarré de part & d'autre : vient $x^2 + \frac{bx}{d} + \frac{b^2}{4d^2} = \frac{c}{d} + \frac{b^2}{4d^2}$.

5°. L'extraction des racines me donne $x + \frac{1b}{2d} = \sqrt{\frac{c}{d} + \frac{b^2}{4d^2}}$.

Donc $x = \sqrt{\frac{c}{d} + \frac{b^2}{4d^2}} - \frac{1b}{2d}$.

Ainsi la racine de la somme de ces quantités connues, moins la

valeur connue de $\frac{b}{2a}$, sera la valeur de x.

355. *EUDOXE*. Le quarré d'un nombre, plus 30 fois ce nombre, font 64 : comment trouvez-vous ce nombre inconnu ?

ARISTE. 1°. J'appelle ce nombre x : donc par la condition du Problême, $x^2 + 30x = 64$;
* N. Equation du second dégré *.
236. 2°. Je quarre 15, moitié du coëfficient 30 ; & le quarré est... 225.

3°. J'ajoute ce quarré de part & d'autre ; & j'ai $x^2 + 30x + 225 = 64 + 225$, ou .... 289 : dont le premier membre est un
* N. quarré parfait *.
252. 4°. Prenons la racine de chaque membre ....: vient $x + 15 = 17$: enfin, la soustraction me donne $x = 17 - 15$, ou $x = 2$.

Donc 2 est le nombre qu'il falloit trouver.

EUDOXE. Et c'en est bien assez, Ariste, pour voir que vos idées sur le Calcul Numérique & sur le Calcul Algébrique ou Littéral, sont justes, nettes, précises & suivies. Si vos idées sur la Géométrie le sont de même, le reste des Mathématiques n'aura rien d'inaccessible pour vous ; & cette science qui paroît si épineuse, & où si peu de personnes voyent clair, ne sera pour vous qu'une source de lumières & d'agrémens.

ARISTE. Après une assez longue suite d'Entretiens sur des vérités fort abstraites ; je serois ravi, Eudoxe, que vous fussiez d'humeur à parler de vérités un peu plus sensibles, je veux dire, de Géométrie.

EUDOXE. Volontiers, Ariste ; & dans cette vûe, je me rendrai dans votre Cabinet au premier jour.

Fin du Tome premier.

